

Diplomarbeit

Empirical Mode Decomposition via adaptiver Wavelet-Approximation

Johann Rudi

Matrikelnummer: 6310546

16. April 2010

Universität Paderborn

Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik

Institut für Mathematik

Betreuung und Erstgutachten: Prof. Dr. Angela Kunoth

Zweitgutachten: Prof. Dr. Norbert Köckler

Erklärung

Hiermit versichere ich, Johann Rudi, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht worden sind, und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Paderborn, den 16. April 2010

Danksagung

Für die Vergabe des Diplomarbeitsthemas und für ihre hervorragende Betreuung danke ich Frau Prof. Dr. Kunoth. Ich danke Herr Prof. Dr. Köckler herzlich dafür, dass er sich dazu bereit erklärt hat das Zweitgutachten anzufertigen. Helena, Jan, Natasa und Waldemar danke ich für ihre konstruktiven Korrekturen und Anmerkungen zu dieser Arbeit. Ein besonderer Dank gilt meiner Familie und meinen Freunden für ihre Unterstützung während meines Studiums und darüber hinaus.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen für die Zeit-Frequenz-Analyse mit der HHT	4
2.1	Stochastische Prozesse	4
2.2	Nichtlineare dynamische Systeme	7
2.3	Fourier-Transformation	7
2.4	Kontinuierliche Wavelet-Transformation	10
2.5	Hilbert-Transformation	11
2.6	Analytisches Signal	13
2.7	Instantane Frequenz	15
2.8	Bemerkungen zur instantanen Frequenz und Einführung des Monokomponentensignals	17
3	Hilbert-Huang-Transformation (HHT)	20
3.1	Intrinsic Mode Function	21
3.2	Empirical Mode Decomposition	21
3.3	Weiterentwicklung der Empirical Mode Decomposition	24
3.4	Hilbert-Spektral-Analyse	34
3.5	Anwendung der HHT: Analyse hydrologischer Zeitreihen	42
3.6	Probleme und offene Fragen	58
4	Weitere Entwicklungen zur HHT und Alternativen	63
4.1	Lokale Mittelwertfunktionen als Lösungen gekoppelter PDEs	63
4.2	Anwendung der Empirical Mode Decomposition auf ein Rauschen	64
4.3	Mode-Mixing-Problem	65
4.4	Ensemble Empirical Mode Decomposition	65
4.5	Trennung von Frequenzen beim Zwei-Ton-Signal	66
4.6	Normalisierte Hilbert-Transformation und direkte Quadratur	67
4.7	Synchrosqueezed Wavelet Transforms	69
5	Adaptive Wavelet-Approximation	74
5.1	Grundlagen von Wavelets	74
5.2	Adaptive Datenapproximation mit B-Spline-Wavelets	80

6	EMD mittels adaptiver Wavelet-Approximation	85
6.1	Idee des neuen Ansatzes	85
6.2	Instantane Frequenz von Wavelets	87
6.3	Frequenzmodulationen bei Wavelets	109
7	Zusammenfassung und Ausblick	114
A	Eingabe- und Ausgabeparameter des EMD-Algorithmus	116
	Symbolverzeichnis	119
	Literaturverzeichnis	121

Kapitel 1

Einleitung

Mit Signalen ist man nicht nur in vielen wissenschaftlichen Disziplinen, sondern bereits im Alltag konfrontiert. Aus diesem Grund ist die Analyse von Signalen wichtig für die Gewinnung neuer Erkenntnisse, und die Entwicklung von Analysemethoden für Signale hat daher eine lange Tradition.

Unter einem Signal werden in dieser Arbeit sowohl kontinuierliche Funktionen $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, als auch diskrete Zeitreihen $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ verstanden. Eine diskrete Zeitreihe kann durch Interpolation oder Approximation in eine kontinuierliche Funktion überführt werden. Umgekehrt kann eine kontinuierliche Funktion durch abtasten an diskreten Zeitstellen in eine diskrete Zeitreihe umgewandelt werden. Signale werden in stationäre und nichtstationäre Signale sowie in lineare und nichtlineare Signale klassifiziert. Die Stationarität ist eine stochastische Eigenschaft und sie wird im Abschnitt 2.1 eingeführt. Der Bedeutung der Linearität ist der Abschnitt 2.2 gewidmet.

Die Zeit-Frequenz-Analyse ist eine Methode zur Untersuchung von Signalen, bei der die in einem Signal enthaltenen Frequenzen bestimmt werden. Die Frequenzen können mit der Zeit variieren oder unabhängig von der Zeit sein. Mit einer Zeit-Frequenz-Analyse können neue Erkenntnisse über die dem Signal zugrunde liegenden Prozesse, Phänomene oder auch Strukturen gewonnen werden. Sie ermöglicht, in einem Signal mehrere in separierten Frequenzbändern gleichzeitig ablaufende Prozesse zu identifizieren. Außerdem kann eine Zeit-Frequenz-Analyse zu der Bestimmung von Parametern für Simulationen dienen. Die Anwendungsgebiete für Zeit-Frequenz-Analysemethoden sind vielfältig und sind z. B. in den Bereichen der Akustik, Optik, Mechanik; Geologie, Meteorologie und Medizin zu finden.

Die Fourier-Transformation ist eine der ältesten und die erste in dieser Arbeit im Abschnitt 2.3 vorgestellte Zeit-Frequenz-Analysemethode. Die Anfänge ihrer Entwicklung gehen bis ins 18. Jahrhundert zurück. Sie zerlegt ein Signal in eine Summe von sin/cos-Basisfunktionen. Die Basisfunktionen besitzen globale Träger, weswegen die Frequenzen bei der Fourier-Transformation von der Zeit unabhängig sind. Zeitunabhängige Frequenzen werden auch als globale Frequenzen bezeichnet. Die globalen Frequenzen führen dazu, dass die Fourier-Transformation nur für die Analyse stationärer Signale geeignet ist. Weiterhin setzt die Fourier-Transformation lineare Signale voraus.

Die kontinuierliche Wavelet-Transformation ist eine weitere Methode zur Zeit-Frequenz-Analyse von Signalen, deren Entwicklung Ende der 1980er Jahre begann. Sie wird im Abschnitt 2.4 behandelt. Bei ihr findet eine Zerlegung in Wavelet-Basisfunktionen statt. Wavelets sind Funktionen, die nur auf einem eingeschränkten Bereich um die horizontale Achse oszillieren. Folglich sind die Frequenzen bei der kontinuierlichen Wavelet-Transformation regional, und die kontinuierliche Wavelet-Transformation eignet sich für die Analyse nicht-stationärer Signale. Linearität wird bei der kontinuierlichen Wavelet-Transformation wie auch bei der Fourier-Transformation an die Signale vorausgesetzt.

Mit der Hilbert-Huang-Transformation wurde im Jahr 1998 eine vielversprechende Zeit-Frequenz-Analysemethode von Huang et al. in [HSL⁺98] vorgestellt, die sich erstmals für die Untersuchung nichtstationärer und nichtlinearer Signale eignet. Sie besteht aus den zwei Schritten: Empirical Mode Decomposition und Hilbert-Spektral-Analyse. Die Empirical Mode Decomposition zerlegt ein Signal in eine Summe von Komponenten, die gleichzeitig eine adaptive Basis des Signals bilden. Das Besondere an der Empirical Mode Decomposition ist, dass Signale nicht in eine vor der Analyse festgelegte Basis zerlegt werden, sondern eine adaptiv an ein Signal angepasste Basis entsteht erst während der Ausführung der Empirical Mode Decomposition. Aus dieser a posteriori Basis der Empirical Mode Decomposition können sogenannte instantane (zeitabhängige) Frequenzen berechnet werden. Die Empirical Mode Decomposition setzt weder Stationarität noch Linearität für Signale voraus.

Um die instantane Frequenz eines reellwertigen Signals berechnen zu können, muss das Signal in eine komplexwertige Darstellung gebracht werden. Das wird durch Bilden des analytischen Signals erreicht, wofür die Hilbert-Transformation benötigt wird. Die Hilbert-Transformation, das analytische Signal und die instantane Frequenz bilden somit ein Konzept zur Beschreibung lokaler Frequenzen; sie werden in den Abschnitten 2.5 bis 2.7 vorgestellt. Bei der Hilbert-Spektral-Analyse im zweiten Schritt der Hilbert-Huang-Transformation ist die Berechnung instantaner Frequenzen der Komponenten der Empirical Mode Decomposition essentiell. Es ist dabei von herausragender Bedeutung, dass die instantanen Frequenzen nicht negativ sind, damit die instantanen Frequenzen physikalisch sinnvoll sind. Die Hilbert-Huang-Transformation wird im Kapitel 3 vorgestellt. Diese sich in der Entwicklung befindende Methode wird mit den etablierten Analysemethoden der Fourier-Transformation und der kontinuierlichen Wavelet-Transformation qualitativ anhand von synthetischen und aus Anwendungen stammenden Signalen verglichen. Das Kapitel 4 widmet sich neuen Ansätzen der Weiterentwicklung der Hilbert-Huang-Transformation.

Bei der Empirical Mode Decomposition handelt es sich um eine heuristische Methode, deren Funktionsweise bisher nur empirisch belegt werden konnte. Hinzu kommt, dass für die Hilbert-Huang-Transformation negative instantane Frequenzen theoretisch in [SV06] nachgewiesen werden konnten und in der Praxis zu beobachten sind. Die sich bei der Empirical Mode Decomposition und der Hilbert-Huang-Transformation ergebenden Probleme werden ausführlich im Abschnitt 3.6 diskutiert.

Ein neuartiger und erstmals in dieser Arbeit vorgestellter alternativer Ansatz zur Empiri-

cal Mode Decomposition wird im Kapitel 6 entwickelt. Er beruht auf der adaptiven Wavelet-Approximation, die im Kapitel 5 behandelt wird. Die adaptive Wavelet-Approximation ist ein effizienter Data-Fitting-Algorithmus, der Wavelets als Basisfunktionen verwendet. Als Ergebnis liefert sie eine Approximation von Datenpunkten als Linearkombination von Wavelets auf mehreren Levels. Sie wurde von Castaño im Rahmen seiner Dissertation [Cas05] (siehe auch [CK03]) entwickelt. Die Idee des neuen Ansatzes besteht darin, Linearkombinationen von Wavelets auf demselben Level als mögliche Kandidaten für die Komponenten der Empirical Mode Decomposition zu identifizieren.

Das Ziel dieser Arbeit ist die theoretische Untersuchung des neuen Ansatzes. Ein Schwerpunkt wird auf die Bestimmung von Vorzeichen der instantanen Frequenzen der Linearkombinationen von Wavelets auf demselben Level gelegt. Es soll herausgefunden werden, welche Bedingungen für die Koeffizienten bei einer Linearkombination von Wavelets auf demselben Level gelten müssen, damit die instantane Frequenz einer Linearkombination nicht negativ ist.

Des Weiteren besitzen die Komponenten der Empirical Mode Decomposition Modulationen in ihren Frequenzen, d. h. die Frequenzen variieren mit der Zeit. Diese wichtige Eigenschaft ermöglicht der Empirical Mode Decomposition eine additive Zerlegung in eine relativ geringe Anzahl von Komponenten. Folglich wird im Abschnitt 6.3 untersucht, wie sich Frequenzmodulationen bei Linearkombination von Wavelets auf demselben Level erreichen lassen.

Kapitel 2

Grundlagen für die Zeit-Frequenz-Analyse mit der Hilbert-Huang-Transformation

Dieses Kapitel beschreibt die Grundlagen für die Zeit-Frequenz-Analyse von Signalen. In den ersten beiden Abschnitten werden die wichtigen Begriffe Stationarität und Linearität, die für die Klassifikation von Signalen gebraucht werden, behandelt. Mit der Fourier-Transformation und der Short-Time-Fourier-Transformation im Abschnitt 2.3 werden zwei Integraltransformationen eingeführt, die für die Untersuchung von Frequenzen in einem Signal benutzt werden können. Im Abschnitt 2.4 wird die kontinuierliche Wavelet-Transformation vorgestellt. Die folgenden Abschnitte 2.5 bis 2.7 über die Hilbert-Transformation, das analytische Signal und die instantane Frequenz bilden ein Konzept zur Beschreibung lokal variierender zeitabhängiger Frequenzen in Signalen, das im Kapitel 3 über die Hilbert-Huang-Transformation Verwendung findet.

2.1 Stochastische Prozesse

Eine zeitlich geordnete und feste Folge $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit einem diskreten Zeitindex t wird als *Zeitreihe* bezeichnet. Eine Verallgemeinerung von Zeitreihen kann vorgenommen werden, indem Zeitreihen als Realisierungen stochastischer Prozesse verstanden werden.

Dieser Abschnitt bietet eine kurze Einführung in die stochastischen Begriffe, die für diese Arbeit relevant sind. Für ausführliche und weiterführende Informationen wird auf [BD91], [Shi96] und [SS01] verwiesen.

Definition 2.1.1. Eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Zufallsvariable* über dem Maßraum (Ω, Σ, P) , wobei Ω ein Ergebnisraum, Σ eine σ -Algebra und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß sind, falls

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \Sigma$$

für alle Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ gilt.

Definition 2.1.2. Sei X eine Zufallsvariable über dem Maßraum (Ω, Σ, P) . Es werden die folgenden Bezeichnungen definiert:

- *Verteilungsfunktion* $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ von X :

$$F_X(x) := P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- *Dichtefunktion* f_X von X : f_X ist die Ableitung der Verteilungsfunktion F_X ; sie erfüllt $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- *Erwartungswert* E von X :

$$E[X] := \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

- *Varianz* Var von X :

$$\text{Var}[X] := E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2.$$

- *Kovarianz* Cov zweier Zufallsvariablen X_1 und X_2 :

$$\text{Cov}[X_1, X_2] := E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])] = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2].$$

Definition 2.1.3. Eine Folge $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ von Zufallsvariablen X_t mit einem diskreten Zeitindex t wird als *stochastischer Prozess* bezeichnet.

Es ist möglich, stochastische Prozesse auf einen kontinuierlichen Zeitindex $t \in \mathbb{R}$ zu verallgemeinern.

Definition 2.1.4. Falls der Erwartungswert E bzw. die Varianz Var der Zufallsvariablen X_t für alle $t \in \mathbb{Z}$ existiert, dann ist die *Mittelwertfunktion* μ des stochastischen Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ durch

$$\mu(t) := E[X_t], \quad t \in \mathbb{Z},$$

gegeben und die *Varianzfunktion* σ^2 von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ durch

$$\sigma^2(t) := \text{Var}[X_t], \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Sofern die Mittelwertfunktion μ des stochastischen Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ existiert, ist die *Kovarianzfunktion* γ von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ als

$$\gamma(s, t) := \text{Cov}[X_s, X_t] = E[(X_s - \mu(s))(X_t - \mu(t))], \quad s, t \in \mathbb{Z},$$

definiert.

Die Kovarianzfunktion wird in der Literatur auch mit Autokovarianzfunktion bezeichnet. Mit den zuvor definierten Hilfsmitteln zur Beschreibung stochastischer Prozesse kann der Stationaritätsbegriff eingeführt werden.

Definition 2.1.5. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt

- *mittelwertstationär*, falls $\mu(t)$ konstant ist,

$$\mu(t) =: \mu \quad \text{für alle } t \in \mathbb{Z},$$

- *varianzstationär*, falls $\sigma^2(t)$ konstant ist,

$$\sigma^2(t) =: \sigma^2 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{Z},$$

- *kovarianzstationär*, falls $\gamma(s, t)$ nur von der Zeitdifferenz $s - t$ abhängt,

$$\gamma(s, t) =: \gamma(s - t) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{Z}.$$

Definition 2.1.6. Ein stochastischer Prozess heißt *schwach stationär*, falls er mittelwert- und kovarianzstationär ist.

Bemerkung 2.1.7. Ein kovarianzstationärer Prozess ist auch varianzstationär, weil aus der Kovarianzstationarität

$$\sigma^2(t) = \gamma(t, t) = \gamma(0) = \gamma(s, s) = \sigma^2(s)$$

folgt.

Definition 2.1.8. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt *streng stationär*, falls die gemeinsame Verteilungsfunktion jedes endlichen Systems von Zufallsvariablen $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ des Prozesses identisch mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion des um s Zeitpunkte verschobenen Systems $(X_{t_1+s}, \dots, X_{t_n+s})$ ist, d. h.

$$F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = F_{X_{t_1+s}, \dots, X_{t_n+s}}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \quad \text{für alle } n, s \in \mathbb{N}.$$

Aus der Definition der starken Stationarität kann die folgende Bemerkung 2.1.9 formuliert werden (siehe [BD91], S. 12).

Bemerkung 2.1.9. Die Definition 2.1.8 der strengen Stationarität ist äquivalent dazu, dass $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ und $(X_{t_1+s}, \dots, X_{t_n+s})$ dieselbe gemeinsame Dichtefunktion für alle $n, s \in \mathbb{N}$ besitzen.

Bei der Signalanalyse ist die Definition für schwach stationäre Prozesse ausreichend. Im Folgenden werden schwach stationäre Prozesse verkürzt mit stationär bezeichnet.

2.2 Nichtlineare dynamische Systeme

Die grundlegende Eigenschaft eines Systems ist, dass aus einer Eingabe eine Ausgabe erzeugt wird. Ein System lässt sich mathematisch als ein Operator darstellen, der z. B. aus einem Eingangssignal ein Ausgangssignal erzeugt. Bei nichtlinearen Systemen hängt die Ausgabe nichtlinear von der Eingabe ab. Ein dynamisches System verändert seine Ausgabeeigenschaften mit der Zeit. Falls ein System vorliegt, bei dem die Eingabe und die Ausgabe kontrolliert werden kann, dann kann beurteilt werden, ob das System linear oder nichtlinear ist. In vielen Fällen liegen jedoch nur Messungen vor, die die Ausgabe eines Systems darstellen, und die Eingabe ist nicht bekannt und kann nicht kontrolliert werden. Es konnte bisher keine Möglichkeit gefunden werden, nur anhand eines Ausgangssignals zu beurteilen, ob ein System linear ist oder nicht (vgl. [Hua05], S. 19 f.). Ein Ausgangssignal, das von einem nichtlinearen System stammt, wird als nichtlineares Signal bezeichnet ([Hua05], S. 19 f.).

Jackson unterscheidet in [Jac91] zwischen Systemen und Phänomenen. Systeme dienen laut Jackson dazu, Phänomene zu beschreiben, also werden mit Systemen Phänomene modelliert. Ein lineares System, das z. B. die Form einer linearen Operatorgleichung haben könnte, muss nicht notwendig ein lineares Phänomen beschreiben, weil nichtlineare Phänomene existieren, die mit einer linearen Gleichung modelliert werden können (vgl. [Jac91], S. 3). Nach der Auffassung von Jackson können sogar alle Phänomene mit linearen Operatorgleichungen dargestellt werden (vgl. [Jac91], S. 4). Er formuliert daher die folgende Definition nichtlinearer Phänomene: „Physical phenomena concern the interrelationship of a set of physical variables which are deterministic (within some accuracy). Nonlinear phenomena involve those sets of variables such that an initial change of one variable does not produce a proportional change in the behavior of that variable, or some other variable. In other words, the ratio (action/reaction) is not constant.“ ([Jac91], S. 6).

2.3 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation wird für Funktionen in dem Raum $L_1(\mathbb{R})$ definiert, sie wird auf den Raum $L_2(\mathbb{R})$ erweitert und ihre Eigenschaften werden angegeben. Die in diesem Abschnitt beschriebene Erweiterung der Fourier-Transformation auf Funktionen aus $L_2(\mathbb{R})$ ist an den Abschnitt V.2 aus [Wer07] angelehnt, in dem die Beweise der hier angegebenen Sätze zu finden sind. Weiterführende Informationen sind [Wer07] und [BNB00] zu finden. In diesem Abschnitt werden stets komplexwertige Funktionen mit reellem Definitionsbereich betrachtet, d. h. Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Definition 2.3.1. Für eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$ heißt

$$\mathcal{F}[f](\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

die *Fourier-Transformierte* von f . Für die Fourier-Transformierte von f wird auch die Bezeichnung $F(\omega) := \mathcal{F}[f](\omega)$ verwandt. Die Abbildung $\mathcal{F}$ heißt *Fourier-Transformation*.

Offensichtlich ist die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}[f]$ wohldefiniert und messbar und die Abbildung $\mathcal{F}$ ist linear. Bezeichne $C_0(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$ den Raum der „im Unendlichen verschwindenden“ und stetigen Funktionen.

Satz 2.3.2. *Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$. Dann gilt $\mathcal{F}[f] \in C_0(\mathbb{R})$ und die Abbildung $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ ist ein stetiger linearer Operator.*

Nun wird $\mathcal{F}$ auf einen geeigneten Teilraum, der aus glatten Funktionen besteht, eingeschränkt. Dazu definiert man den Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definition 2.3.3. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, falls

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} t^\alpha f(t) = 0 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Der Raum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) \text{ schnell fallend für alle } \beta \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

heißt *Schwartzraum* und seine Elemente *Schwartzfunktionen*.

Es kann gezeigt werden, dass der Teilraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L_p(\mathbb{R})$ dicht in $L_p(\mathbb{R})$ für $1 \leq p < \infty$ liegt.

Satz 2.3.4. *Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ ist eine Bijektion von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Der inverse Operator ist durch*

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad t \in \mathbb{R},$$

gegeben.

Da der Operator $\mathcal{F}$ zusätzlich zu Satz 2.3.4 auf dem Teilraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L_2(\mathbb{R})$ bezüglich der L_2 -Norm isometrisch ist, d. h. es gilt

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

kann $\mathcal{F}$ zu einem isometrischen Operator auf $L_2(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden. Die Fortsetzung wird *Fourier-Plancherel-Transformation* genannt und mit $\mathcal{F}_p$ bezeichnet. Für $\mathcal{F}_p$ gilt die Plancherel-Gleichung

$$(\mathcal{F}_p[f], \mathcal{F}_p[g])_{L_2(\mathbb{R})} = (f, g)_{L_2(\mathbb{R})} \quad \text{für alle } f, g \in L_2(\mathbb{R}). \quad (2.3.1)$$

Um einen Zusammenhang zwischen der anfangs definierten Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ auf $L_1(\mathbb{R})$ und der Fourier-Plancherel-Transformation $\mathcal{F}_p$ herzustellen, werden die beiden Definitionen

$$B_R := \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq R\} \quad \text{und} \quad g_R(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{B_R} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{für } f \in L_2(\mathbb{R})$$

benötigt.

Satz 2.3.5.

(i) Für $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathcal{F}_p[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{fast überall.}$$

(ii) Für $f \in L_2(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathcal{F}_p[f] = \lim_{R \rightarrow \infty} g_R, \quad (2.3.2)$$

wobei die Konvergenz im L_2 -Sinn gemeint ist. Die Aussage (2.3.2) lässt sich auch durch die Formel

$$\mathcal{F}_p[f](\omega) = \text{l.i.m.}_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{B_R} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

ausdrücken, wobei mit l.i.m. („Limes im Mittel“) die Konvergenz im quadratischen Mittel gemeint ist.

Wegen des Interpolationssatzes von Riesz-Thorin und Satz 2.3.5 (i) werden ab jetzt $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_p$ als dieselben Operatoren angesehen, und die Plancherel-Gleichung für $\mathcal{F}_p$ (2.3.1) gilt nun auch für $\mathcal{F}$:

$$(\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g])_{L_2(\mathbb{R})} = (f, g)_{L_2(\mathbb{R})} \quad \text{für alle } f, g \in L_2(\mathbb{R}). \quad (2.3.3)$$

In dem nächsten Satz werden einige für diese Arbeit relevante Eigenschaften der Fourier-Transformation aufgeführt.

Satz 2.3.6. Seien $f, g \in L_2(\mathbb{R})$.

(i) Für die Fourier-Transformation der Faltung $(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds$ gilt

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f](\omega) \mathcal{F}[g](\omega). \quad (2.3.4)$$

(ii) Sei f differenzierbar und die Ableitung von f in $L_2(\mathbb{R})$. Für die Fourier-Transformation der Ableitung von f gilt dann

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f](\omega). \quad (2.3.5)$$

Eine inhärente Einschränkung der Fourier-Transformation wird durch die Heisenberg-Gabor-Unschärferelation beschrieben, der zufolge der Träger eines Signals s und der Träger seines Fourier-Spektrums $\mathcal{F}[s]$ nicht gleichzeitig beliebig klein werden können (vgl. [Fla99], S. 12 ff.).

Um mit der Fourier-Transformation eine zeitabhängige Frequenzdarstellung eines Signals zu erzielen, bietet sich die Möglichkeit an, den Träger eines gegebenen Signals in Unterintervalle aufzuteilen und die Fourier-Transformation jeweils über die Unterintervalle zu berechnen. Diese Idee wird bei der Short-Time-Fourier-Transformation, die auch gefensterete Fourier-Transformation genannt wird, aufgegriffen, indem eine Fensterfunktion $h(t)$ festgelegt wird. Damit erhält man die Zeit-Frequenz-Darstellung

$$\mathcal{F}_s[f](t, \omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \overline{h(\tau - t)} e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (t, \omega) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.3.6)$$

der *Short-Time-Fourier-Transformation* $\mathcal{F}_s$ einer Funktion f . Während die Fourier-Transformation stationäre Funktionen voraussetzt, kann die Short-Time-Fourier-Transformation bei stückweise stationären Funktionen eingesetzt werden. Die oben erwähnte Heisenberg-Gabor-Unschärferelation der Fourier-Transformation bewirkt bei der Short-Time-Fourier-Transformation, dass eine Verbesserung der Lokalisierung in der Zeit mittels einer schmalen Fensterfunktion h eine Verschlechterung der Frequenzlokalisierung zur Folge hat und umgekehrt. In der Praxis bedeutet das, dass durch das Testen verschiedener Fensterbreiten bei jedem Signal erneut herausgefunden werden muss, mit welcher Fensterbreite sich neue Erkenntnisse aus der Darstellung, die die Short-Time-Fourier-Transformation liefert, gewinnen lassen. Weitere Informationen zur Short-Time-Fourier-Transformation sind in [Fla99] und [Coh94] zu finden.

In der Signalanalyse wird für die Fourier-Transformation $\mathcal{F}[s](\omega)$ eines Signals $s(t)$ auch der Begriff *Fourier-Spektrum* und für die Short-Time-Fourier-Transformation $\mathcal{F}_s[s](t, \omega)$ auch der Begriff *Fourier-Spektrogramm* verwendet.

2.4 Kontinuierliche Wavelet-Transformation

Die Wavelets ψ für die kontinuierliche Wavelet-Transformation sind als Elemente von $L_2(\mathbb{R})$, welche die Zulässigkeitsbedingung

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}[\psi](\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

erfüllen, definiert. Aus einem Wavelet ψ wird eine Wavelet-Familie

$$\left\{ \psi^{a,b} : (a, b) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \right\}$$

durch Dilatation und Translation erzeugt, d. h.

$$\psi^{a,b}(t) := |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

mit der die kontinuierliche Wavelet-Transformation definiert werden kann.

Definition 2.4.1. Für eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ heißt

$$\mathcal{W}_\psi[f](a, b) := \left(f, \psi^{a,b}\right)_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f(t) |a|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad (a, b) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R},$$

kontinuierliche Wavelet-Transformation (CWT) von f . Die Variable a wird mit *Skala* bezeichnet.

Die Wavelets sind auf einem eingeschränkten Gebiet um die horizontale Achse oszillierende Funktionen. Aufgrund dieser Lokalitätseigenschaft der Wavelets ist die kontinuierliche Wavelet-Transformation für die Zeit-Frequenz-Analyse von nichtstationären Signalen geeignet. Weiterführende Informationen zur kontinuierlichen Wavelet-Transformation sind in [Dau92] zu finden.

Für Zeit-Frequenz-Analyse von Signalen mit der kontinuierlichen Wavelet-Transformation sind die folgenden Wavelets geeignet:

- (komplexes) Morlet-Wavelet

$$\psi(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi f_b}} e^{2i\pi f_c t} e^{-t^2/f_b}$$

mit dem Bandbreitparameter f_b und der mittleren Frequenz f_c ,

- Mexican-Hat-Wavelet

$$\psi(t) := \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1 - t^2) e^{-t^2/2}.$$

Die Eigenschaften dieser Wavelets für die Signalanalyse sind in [TC98] beschrieben.

2.5 Hilbert-Transformation

Die Hilbert-Transformation wird für die Berechnung des analytischen Signals benötigt, das später im Abschnitt 2.6 eingeführt wird. Ausführliche Informationen zur Hilbert-Transformation sind in [Tit86, Bra78, Pan96] und [Hah96] zu finden.

Definition 2.5.1. Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$\mathcal{H}[f](t) := \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{t-s} ds := \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{t-\epsilon} \frac{f(s)}{t-s} ds + \int_{t+\epsilon}^{\infty} \frac{f(s)}{t-s} ds \right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.5.1)$$

die *Hilbert-Transformation* von f , wenn der Grenzwert existiert. „PV“ steht dabei für den Cauchy'schen Hauptwert (principal value) des Integrals.

Dieses Integral existiert für jedes $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, fast überall, und $\mathcal{H}[f]$ liegt nach dem Theorem von M. Riesz in $L_p(\mathbb{R})$ (siehe [BS88]). Die Hilbert-Transformation kann auch als Faltung

$$\mathcal{H}[f](t) = \left(\frac{1}{\pi t} \right) * f(t)$$

geschrieben werden. Sie besitzt die folgenden und für diese Arbeit nützlichen Eigenschaften. Die Beweise der Aussagen des nächsten Satzes sind nicht in der Literatur zu finden. Sie werden wegen der Nützlichkeit und Wichtigkeit der Aussagen hier aufgeführt.

Satz 2.5.2.

(i) Die Hilbert-Transformation ist linear.

(ii) Die Hilbert-Transformation kommutiert mit der Translation

$$\mathcal{H}[f(\cdot + \tau)](t) = \mathcal{H}[f](t + \tau). \quad (2.5.2)$$

(iii) Die Hilbert-Transformation der Ableitung ist die Ableitung der Hilbert-Transformation

$$\mathcal{H}[f'] = (\mathcal{H}[f])' \quad (2.5.3)$$

für eine differenzierbare Funktion f .

(iv) Für die Fourier-Transformation der Hilbert-Transformation gilt

$$\mathcal{F}[\mathcal{H}[f]](\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega) \mathcal{F}[f](\omega) \quad \text{für alle } f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Hierbei bezeichnet sgn die Signumfunktion, die als

$$\operatorname{sgn}(\omega) := \begin{cases} -1 & \text{für } \omega < 0, \\ 0 & \text{für } \omega = 0, \\ 1 & \text{für } \omega > 0 \end{cases}$$

definiert ist.

Beweis. (i) Seien $f, g \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\alpha f + \beta g](t) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha f(s) + \beta g(s)}{t - s} ds \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \operatorname{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{t - s} ds + \frac{\beta}{\pi} \operatorname{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{t - s} ds \\ &= \alpha \mathcal{H}[f](t) + \beta \mathcal{H}[g](t). \end{aligned}$$

(ii) Mit der Substitution $\xi := s + \tau$ folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[f(\cdot + \tau)](t) &= \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s + \tau)}{t - s} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{t - \xi + \tau} d\xi \\ &= \mathcal{H}[f](t + \tau).\end{aligned}$$

(iii) Mit der Gleichung (2.5.2) aus (ii) folgt

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}[f])' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}[f](t + h) - \mathcal{H}[f](t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}[f(\cdot + h)](t) - \mathcal{H}[f](t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{H}\left[\frac{f(\cdot + h) - f(\cdot)}{h}\right](t) \\ &= \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - s} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(s + h) - f(s)}{h} \right) ds \\ &= \mathcal{H}[f'](t).\end{aligned}$$

(iv) Sei $f \in L_2(\mathbb{R})$. Mit (2.3.4) und $\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right](\omega) = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{sgn}(\omega)$ folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathcal{H}[f](t)](\omega) &= \mathcal{F}\left[\left(\frac{1}{\pi t}\right) * f(t)\right](\omega) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right](\omega) \mathcal{F}[f](\omega) \\ &= -i \text{sgn}(\omega) \mathcal{F}[f](\omega).\end{aligned}$$

□

2.6 Analytisches Signal

Die folgende Herleitung des analytischen Signals ist Abschnitt 2.3 aus [Coh94] entnommen. Sei das gegebene Signal reellwertig, d. h.

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Um für das Signal $s(t)$ eine sinnvolle instantane Frequenz (siehe Abschnitt 2.7) berechnen zu können, benötigt man eine komplexe Darstellung

$$z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z(t) := s(t) + i s_h(t) \quad (2.6.1)$$

mit einer zu bestimmenden Hilfsfunktion $s_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\text{Re}(z(t)) = s(t) \quad (2.6.2)$$

gilt. Die Amplitude $a(t)$ und die Phase $\varphi(t)$ des komplexwertigen Signals

$$z(t) = s(t) + i s_h(t) = a(t) e^{i\varphi(t)} \quad (2.6.3)$$

lauten dann

$$a(t) = \sqrt{s^2(t) + s_h^2(t)} \quad \text{und} \quad \varphi(t) = \arctan\left(\frac{s_h(t)}{s(t)}\right).$$

Definition 2.6.1. Sei $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein reellwertiges Signal und $S(\omega) := \mathcal{F}[s](\omega)$ die Fourier-Transformierte von $s(t)$. Die *Durchschnittsfrequenz* $\langle \omega \rangle$ ist definiert als

$$\langle \omega \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \omega |S(\omega)|^2 d\omega, \quad (2.6.4)$$

wobei $|S(\omega)|^2$ als *Energie-Dichte-Spektrum* bezeichnet wird.

Für die Fourier-Transformierte $S(\omega) = \mathcal{F}[s](\omega)$ des reellwertigen Signals $s(t)$ gilt die Beziehung $S(-\omega) = \overline{S(\omega)}$, welches zur Folge hat, dass das Energie-Dichte-Spektrum $|S(\omega)|^2$ immer symmetrisch bezüglich des Nullpunkts ist. Für die Durchschnittsfrequenz jedes reellwertigen Signals $s(t)$ erhält man deswegen

$$\langle \omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \omega |S(\omega)|^2 d\omega = 0.$$

Eine Möglichkeit, eine nichttriviale und somit physikalisch aussagekräftigere Durchschnittsfrequenz zu erhalten, besteht darin, bei der Durchschnittsbildung negative Frequenzen zu vernachlässigen und nur über die nichtnegative reelle Halbebene zu integrieren, d. h.

$$\langle \tilde{\omega} \rangle = \int_0^{\infty} \omega |S(\omega)|^2 d\omega$$

zu setzen. Um bei der Durchschnittsberechnung weiterhin über die gesamte Menge $\mathbb{R}$ integrieren zu können, soll nun eine komplexe Darstellung der Form (2.6.1) eines reellwertigen Signals $s(t)$, genauer gesagt eine passende Funktion $s_h(t)$, gefunden werden, sodass die Bedingung (2.6.2) und

$$Z(\omega) = \mathcal{F}[z](\omega) = \begin{cases} S(\omega) & \text{für } \omega \geq 0, \\ 0 & \text{für } \omega < 0 \end{cases} \quad (2.6.5)$$

erfüllt sind. Als Ansatz wird $z(t)$ als inverse Fourier-Transformation von $S(\omega)$

$$z(t) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.6.6)$$

geschrieben, wobei nur über die positiven Frequenzen integriert wird. Das Multiplizieren mit zwei erfolgt, um (2.6.2) zu gewährleisten. Die Fourier-Transformation von $s(t)$

$$S(\omega) = \mathcal{F}[s](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

wird in (2.6.6) eingesetzt

$$\begin{aligned} z(t) &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty s(\tau) e^{-i\omega\tau} e^{i\omega t} d\tau d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty s(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega \end{aligned}$$

und

$$\int_0^\infty e^{i\omega x} d\omega = \pi\delta(x) + \frac{i}{x}$$

mit der Delta-Distribution δ wird benutzt, um

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty s(\tau) \left(\pi\delta(t-\tau) + \frac{i}{t-\tau} \right) d\tau \\ &= s(t) + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

zu erhalten. Der Imaginärteil von (2.6.7) ist genau die Hilbert-Transformation $\mathcal{H}[s](t)$ des Signals $s(t)$, wie sie in der Definition 2.5.1 angegeben ist.

Definition 2.6.2. Sei $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein reellwertiges Signal. Die komplexwertige Funktion

$$\mathcal{A}[s](t) := s(t) + i\mathcal{H}[s](t) \quad (2.6.8)$$

heißt *analytisches Signal*.

Die Bezeichnung „analytisch“ ist darin begründet, dass diese Typen komplexwertiger Funktionen die Cauchy-Riemann Bedingungen für Differenzierbarkeit erfüllen und traditionell analytische Funktionen genannt wurden. Die Begriffe holomorphe Funktion und komplex differenzierbare Funktion werden synonym zum Ausdruck analytische Funktion gebraucht. Für weitere Informationen wird auf [Wei10] verwiesen.

2.7 Instantane Frequenz

Bei der instantanen Frequenz geht es darum, eine mathematische Herleitung für sich mit der Zeit verändernde Frequenzen zu finden. Sie ist für ein komplexwertiges Signal definiert. Um die instantane Frequenz eines reellwertigen Signals zu berechnen, muss erst das analytische Signal aus der Definition 2.6.2 gebildet werden. Als Vorlage für die Herleitung der instantanen Frequenz dient der Abschnitt 1.5 aus [Coh94].

Die Definition der Durchschnittsfrequenz für ein komplexwertiges Signal $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist analog zu der Definition 2.6.1 für ein reellwertiges Signal.

Satz 2.7.1. Seien $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $S(\omega) := \mathcal{F}[s](\omega)$ die Fourier-Transformierte von $s(t)$. $s(t)$ besitze die Amplituden-Phasen-Darstellung

$$s(t) = a(t) e^{i\varphi(t)}$$

$$\text{mit Amplitude } a(t) := \sqrt{\operatorname{Re}(s(t))^2 + \operatorname{Im}(s(t))^2} \quad (2.7.1)$$

$$\text{und Phase } \varphi(t) := \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(s(t))}{\operatorname{Re}(s(t))}\right). \quad (2.7.2)$$

Dann gilt für die Durchschnittsfrequenz

$$\langle \omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\varphi}{dt}(t) \right) |s(t)|^2 dt. \quad (2.7.3)$$

Beweis. Die Definition der Durchschnittsfrequenz (2.6.4) wird mittels (2.3.5) und der Plancherel-Gleichung (2.3.3) umgeformt

$$\begin{aligned} \langle \omega \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega |S(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S(\omega)} \omega S(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}[s](\omega)} \left(-i \mathcal{F}\left[\frac{ds}{dt}\right](\omega) \right) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{s(t)} \left(-i \frac{ds}{dt}(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Das Einsetzen von

$$-i \frac{ds}{dt}(t) = -i \frac{da}{dt}(t) e^{i\varphi(t)} = \left(\frac{d\varphi}{dt}(t) - i \frac{\frac{da}{dt}(t)}{a(t)} \right) s(t)$$

liefert

$$\begin{aligned} \langle \omega \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\varphi}{dt}(t) - i \frac{\frac{da}{dt}(t)}{a(t)} \right) |s(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\varphi}{dt}(t) \right) |s(t)|^2 dt - i \int_{-\infty}^{\infty} a(t) \left(\frac{da}{dt}(t) \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\varphi}{dt}(t) \right) |s(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass a reellwertig ist und in $L_2(\mathbb{R})$ liegt. Daraus folgt $a(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t) \left(\frac{da}{dt}(t) \right) dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} a^2(t) \Big|_{-M}^{+M} \right) = 0. \quad \square$$

Die Gleichung (2.7.3) aus dem letzten Satz motiviert zur Definition der instantanen Frequenz, da auf der rechten Seite $\frac{d}{dt}\varphi(t)$ mit der Dichtefunktion $|s(t)|^2$ über die gesamte Zeitspanne integriert wird. Also ist es sinnvoll den instantanen Wert der zu berechnenden Durchschnittsfrequenz $\langle\omega\rangle$ auf der linken Seite der Gleichung (2.7.3) als $\frac{d}{dt}\varphi(t)$ zu definieren.

Definition 2.7.2. Sei $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ein komplexwertiges Signal mit Amplituden-Phasen-Darstellung

$$s(t) = a(t) e^{i\varphi(t)},$$

wobei die Amplitude und die Phase wie in den Gleichungen (2.7.1) und (2.7.2) gegeben sind. Die *instantane Frequenz* von $s(t)$ ist als

$$\omega(t) := \frac{d\varphi}{dt}(t) \quad (2.7.4)$$

definiert.

Bemerkung 2.7.3. Um die instantane Frequenz $\omega(t)$ wie in der Gleichung (2.7.4) der Definition 2.7.2 für ein reellwertiges Signal $s(t)$ zu berechnen, wird das analytische Signal (2.6.8) gebildet und in die Amplituden-Phasen-Darstellung

$$\mathcal{A}[s](t) = s(t) + i\mathcal{H}[s](t) = a(t) e^{i\varphi(t)}$$

mit

$$a(t) = \sqrt{s^2(t) + \mathcal{H}[s]^2(t)} \quad \text{und} \quad \varphi(t) = \arctan\left(\frac{\mathcal{H}[s](t)}{s(t)}\right)$$

umgeformt. Somit lautet die instantane Frequenz von $s(t)$

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t) = \frac{s(t)\mathcal{H}[s]'(t) - \mathcal{H}[s](t)s'(t)}{a^2(t)}. \quad (2.7.5)$$

2.8 Bemerkungen zur instantanen Frequenz und Einführung des Monokomponentensignals

Die Definition der instantanen Frequenz ist nicht unumstritten (vgl. [HSL⁺98], S. 911). Dieser Abschnitt widmet sich deshalb der physikalischen Bedeutung und Aussagekraft der instantanen Frequenz. Dazu wird zunächst das Signal

$$s(t) := a(t) \cos(\varphi(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.8.1)$$

mit variabler Amplitude $a(t)$ und variabler Phase $\varphi(t)$ betrachtet. Seien $s \in L_2(\mathbb{R})$ und $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ und sei die Amplitude $a(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Darstellung in (2.8.1) des Signals s ist bezüglich der Funktionen a und φ nicht eindeutig, wie ein einfaches Gegenbeispiel in [Fla99] auf S. 27 zeigt.

Wenn das analytische Signal von s durch die komplexwertige Funktion

$$a(t) e^{i\varphi(t)} \quad (2.8.2)$$

dargestellt werden soll und die instantane Frequenz gleich der Ableitung der Phase φ sein soll, dann müssen weitere Bedingungen an die Funktionen a und φ gestellt werden. Um den Term (2.8.2) mit dem analytischen Signal von s identifizieren zu können, müsste

$$\mathcal{H}[s](t) = \mathcal{H}[a \cos(\varphi)](t) \stackrel{!}{=} a(t) \sin(\varphi(t)) \quad (2.8.3)$$

erfüllt sein. Nach dem Theorem von Bedrosian aus [Bed63] gilt

$$\mathcal{H}[a \cos(\varphi)](t) = a(t) \mathcal{H}[\cos(\varphi)](t),$$

falls die Träger der Fourier-Spektren von a und $\cos(\varphi)$ auf die folgende Weise disjunkt sind:

$$\text{supp}(\mathcal{F}[a]) \subseteq [-\omega_1, \omega_1] \quad \text{mit } \omega_1 \geq 0, \quad (2.8.4)$$

$$\text{supp}(\mathcal{F}[\cos(\varphi)]) \subseteq (-\infty, -\omega_1) \cup (\omega_1, \infty). \quad (2.8.5)$$

Um nun die Gültigkeit der Gleichung (2.8.3) zu gewährleisten, müsste noch zusätzlich

$$\mathcal{H}[\cos(\varphi)](t) = \sin(\varphi(t)) \quad (2.8.6)$$

erfüllt sein, was nach [NB66] im Allgemeinen nicht gegeben ist. Die Gleichung (2.8.6) gilt nur dann, falls das Fourier-Spektrum $\mathcal{F}[e^{i\varphi}](\omega)$ der Funktion $e^{i\varphi(t)}$ für $\omega \in (-\infty, 0)$ verschwindet. Das ist jedoch bereits die Bedingung (2.6.5) für das analytische Signal und somit keine neue Erkenntnis. Es rechtfertigt lediglich die Definition des analytischen Signals für das Beispiel-signal $\cos(\varphi(t))$. Signale der Form (2.8.1) spielen bei der Hilbert-Huang-Transformation eine wichtige Rolle und werden entsprechend zu [Qia06] und [QWD09] definiert.

Definition 2.8.1. Ein Signal $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, das als

$$s(t) := a(t) \cos(\varphi(t))$$

mit $s \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, und $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ definiert ist, heißt *Monokomponentensignal*, falls

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[a \cos(\varphi)](t) &= a(t) \sin(\varphi(t)) && \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \\ a(t) &\geq 0 && \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \\ \varphi'(t) &\geq 0 && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gilt.

Für ein Monokomponentensignal hat die instantane Frequenz eine physikalisch sinnvolle Bedeutung. Multikomponentensignale besitzen zur selben Zeit mehr als eine Frequenz, z. B. eine Summe aus zwei unterschiedlich schnell schwingenden Kosinusfunktionen. Bei ihnen stellt die instantane Frequenz keine tatsächlich im Signal vorhandene Frequenz dar, sondern sie ist in diesem Fall ein Mittelwert über alle Frequenzen des Signals zu einem Zeitpunkt. Die instantane Frequenz wird durch den Begriff der instantanen Bandbreite (siehe [Coh94], S. 178 ff.) ergänzt, der die Standardabweichung von der instantanen Frequenz darstellt und als Indikator zur Unterscheidung zwischen Monokomponentensignalen und Multikomponentensignal fungieren kann. Darüber hinaus werden in [Coh94], S. 40 f., die folgenden Merkwürdigkeiten der instantanen Frequenz festgestellt:

- Es kann instantane Frequenzen geben, die nicht im Fourier-Spektrum vorhanden sind.
- Bei einem Signal mit wenigen und scharfen, d. h. deutlich auszumachenden, Frequenzen im Fourier-Spektrum kann sich die instantane Frequenz stetig über unendlich viele Frequenzen erstrecken.
- Obwohl bei analytischen Signalen das Fourier-Spektrum für negative Frequenzen null ist, kann die instantane Frequenz bei bestimmten Signalen negativ sein.
- Bei Signalen mit beschränkter Frequenzbandbreite kann die instantane Frequenz außerhalb des Bands liegen.
- Zwar stellt die instantane Frequenz die Frequenz dar, die lokal zu einem Zeitpunkt existiert, jedoch wird bei ihrer Berechnung mit der Hilbert-Transformation das Signal über die gesamte Zeit integriert.

Kapitel 3

Hilbert-Huang-Transformation (HHT)

Im Jahr 1998 wurde die Hilbert-Huang-Transformation (HHT) von Huang et al. zum ersten Mal in [HSL⁺98] vorgestellt. Dieses Verfahren wurde mit dem Ziel entwickelt, nichtlineare und nichtstationäre Daten oder Signale zu analysieren. Wegen seines einfachen Prinzips, der hohen Adaptivität, der Effektivität und der erfolgreichen Anwendung in unterschiedlichen Gebieten hat sich die HHT zu einem interessanten Forschungsbereich entwickelt und zu dieser Diplomarbeit motiviert. Sie ist beispielsweise in den folgenden Gebieten bereits zum Einsatz gekommen:

- die Charakterisierung von Wellenstrukturen (Huang et al. [HSL99]); die Untersuchung seismischer Aktivitäten (Huang et al. [HCH⁺01]); die Analyse meteorologischer Daten (Duffy [Duf05]) und klimatischer Veränderungen (Coughlin und Tung [CT05]); das Extrahieren von Ereignissen aus Luftdruckmessungen (Roy et al. [RWD08]); die Analyse hydrologischer Zeitreihen (Rudi et al. [RPJ⁺10]), die im Abschnitt 3.5 behandelt wird;
- das Erkennen von Schäden an großen und komplexen Strukturen anhand von Vibrationscharakteristiken (Salvino et al. [SPTN05]), z. B. von Brückenschäden (Huang et al. [HHC05]) und Schäden im Fahrgetriebe (Liu et al. [LRX06]); die Erkennung menschlicher Aktivitäten durch Wände hindurch (Lai et al. [LRN07]);
- die Analyse nichtstationärer Finanzdaten (Huang et al. [HWQ⁺03]);
- die Sprachanalyse und das Entrauschen von Signalen (Liu et al. [LLS05]); die Bildanalyse (Long [Lon05]);
- die Analyse biochemischer Impedanzmessungen an Zellen (Wang et al. [WZKL09]); in der Biomedizin: die Untersuchung komplexer Schwankungen in physiologischen Zeitreihen (Peng et al. [PCG09]); die Untersuchung der atemsynchronen Schwankung der Herzfrequenz (Kuo et al. [KYH09]).

Die HHT ermöglicht eine Zeit-Frequenz-Darstellung eines Signals mit einer klaren Trennung separierter Frequenzen. Sie ist in die folgenden zwei Schritte unterteilt:

- (i) Zerlegen eines gegebenen Signals mit der Empirical Mode Decomposition (beschrieben im Abschnitt 3.2) in eine Summe von Komponenten, die möglichst gute Approximationen an Monokomponentensignale darstellen sollen,
- (ii) Hilbert-Spektral-Analyse (beschrieben im Abschnitt 3.4), bei der die Bestimmung der instantanen Frequenzen essentiell ist.

3.1 Intrinsic Mode Function

Bevor der Algorithmus der Empirical Mode Decomposition im nächsten Abschnitt 3.2 vorgestellt wird, ist die Definition der Intrinsic Mode Function notwendig. Das Ziel dieser Definition ist, Bedingungen, die sich in dem Algorithmus der Empirical Mode Decomposition verwenden lassen, zu formulieren, um eine möglichst gute Approximation von Monokomponentensignalen zu erhalten. Die Intrinsic Mode Function wird wie in [HSL⁺98] definiert.

Definition 3.1.1. Eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Intrinsic Mode Function (IMF)*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Die Anzahl der lokalen Extremstellen und die Anzahl der Nullstellen von g unterscheiden sich höchstens um eins.
- (ii) Die lokale Mittelwertfunktion ist konstant null.

Die lokale Mittelwertfunktion einer Funktion g wird in [HSL⁺98] als der Mittelwert der oberen und unteren Einhüllenden von g berechnet. Die obere bzw. untere Einhüllende werden als die kubische Spline-Interpolation aller lokalen Maxima bzw. Minima von g gebildet. Ein Beispiel für eine IMF ist in Abbildung 3.1 (blau) zu sehen. Die Mittelwertfunktion (rot), die als Mittelwert der oberen und der unteren Einhüllenden (beide grün) berechnet wird, ist konstant null. Die IMF besitzt eine in der Zeit variable Amplitude und eine ebenfalls in der Zeit variable (instantane) Frequenz. Solche Signale werden in der Literatur auch als amplitudenmodulierte und frequenzmodulierte (AM-FM) Signale bezeichnet.

Die Funktionenklasse der IMFs und wie die Approximationsgüte der IMFs an Monokomponentensignale bewertet werden kann, wird im Abschnitt 3.6 diskutiert.

3.2 Empirical Mode Decomposition

Die Empirical Mode Decomposition (EMD) ist ein empirisch entwickelter iterativer „fein-nach-grob“ Algorithmus, der ein nichtlineares und nichtstationäres Signal $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in eine Summe von endlich vielen IMFs g_j und ein Residuum r_n zerlegt,

$$s(t) = \sum_{j=1}^n g_j(t) + r_n(t). \quad (3.2.1)$$

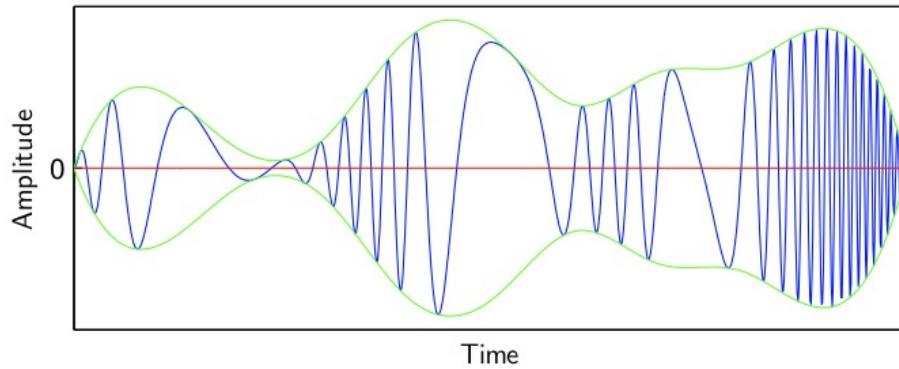


Abbildung 3.1: Beispiel für eine IMF (blau) mit oberer und unterer Einhüllenden (grün) und Mittelwertfunktion (rot)

Auf diese Weise soll die EMD eine physikalisch sinnvolle Zerlegung bezüglich instantaner Frequenzen von s liefern, die eine Approximation der Darstellung

$$s(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \cos(\varphi_j(t)) + r_n(t) \quad (3.2.2)$$

mit Monokomponentensignalen $a_j(t) \cos(\varphi_j(t))$ und absteigenden instantanen Frequenzen

$$\varphi_j(t) > \varphi_{j+1}(t) \quad \text{für alle } t \text{ und } j = 1, \dots, n-1$$

ist. Es wird davon ausgegangen, dass jedes Signal aus einer Summe von unterschiedlichen simplen „intrinsic mode oscillations“ ([SV06], S. 20) entsprechend der Gleichung (3.2.2) besteht. Die EMD wird nun in ihrer ursprünglichen Version aus [HSL⁺98] formuliert.

Um die erste Komponente g_1 , die die höchste Frequenz besitzt, zu gewinnen, wird zunächst der Mittelwert der oberen und unteren Einhüllenden von s berechnet,

$$m_{1,0} := \frac{u[s] + l[s]}{2}, \quad (3.2.3)$$

und $m_{1,0}$ wird lokale Mittelwertfunktion genannt. Hierbei ist die obere Einhüllende $u[s]$ der kubische Spline, der alle lokalen Maxima von s interpoliert, und die untere Einhüllende $l[s]$ der kubische Spline, der alle Minima von s interpoliert. Es wird

$$h_{1,1} := s - m_{1,0}$$

gesetzt. Solange $h_{1,k}$ für $k = 2, 3, \dots$ keine IMF ist, berechnet man

$$h_{1,k} := h_{1,k-1} - m_{1,k-1} \quad \text{mit} \quad m_{1,k-1} := \frac{u[h_{1,k-1}] + l[h_{1,k-1}]}{2}.$$

Laut empirischen Untersuchungen in [HSL⁺98] ist damit zu rechnen, dass nach endlich vielen Schritten $k = n_1$ die erste IMF g_1 gefunden wird. Man erhält also die erste IMF

$$g_1 := h_{1,n_1}$$

mit der höchsten im Signal s vorhandenen instantanen Frequenz. Nach setzen des Residuums

$$r_1 := s - g_1$$

wird der obere Ablauf, der die innere Iteration der EMD darstellt, mit r_1 statt s wiederholt und man erhält $r_2 := r_1 - g_2$. Weitere Iterationen liefern

$$r_j := r_{j-1} - g_j$$

und werden solange durchlaufen, bis r_j höchstens eine Extremstelle besitzt. Die äußere Iteration über den Index j kann ebenfalls empirischen Untersuchungen zufolge nach endlich vielen Schritten $j = n$ beendet werden. r_n ist dann eine monotone Funktion. Somit wurde das Signal s in die gewünschte Darstellung (3.2.1) zerlegt.

Es bleibt noch zu klären, wann in der inneren Iteration der EMD eine der Funktionen $h_{j,k}$ eine IMF ist. Huang et al. schlagen in [HSL⁺98] vor, für ein auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiertes Signal zwei aufeinander folgende Komponenten mit dem Standardabweichungskriterium

$$SD_{j,k} := \frac{\|h_{j,k-1} - h_{j,k}\|_{L_2(I)}^2}{\|h_{j,k-1}\|_{L_2(I)}^2}$$

miteinander zu vergleichen, das bei endlichen Zeitreihen die endliche Summe

$$SD_{j,k} = \sum_i \frac{|h_{j,k-1}(t_i) - h_{j,k}(t_i)|^2}{h_{j,k-1}^2(t_i)}$$

ist. Sobald die Standardabweichung von $h_{j,k}$ kleiner als eine vorgegebene Konstante ϵ ist

$$SD_{j,k} < \epsilon,$$

wird $h_{j,k}$ als eine IMF angesehen.

Bemerkung 3.2.1. Bei der kubischen Spline-Interpolation auf einem beschränkten Intervall, die für die Bestimmung von Einhüllenden benötigt wird, liegen an den Rändern des Intervalls offene Freiheitsgrade vor. Um eine eindeutige Interpolierende zu erhalten, können die Freiheitsgrade durch eine der folgenden Randbedingungen festgelegt werden:

- *Vollständige Interpolation:* Festlegen der Ableitungen am linken und am rechten Rand des Intervalls.

- *Bessel-Bedingung*: Falls die Ableitungen am Rand nicht gegeben sind, wird jeweils eine Parabel durch die ersten drei Minima/Maxima am linken und durch die letzten drei Minima/Maxima am rechten Rand des Intervalls gebildet und die Ableitungen der Parabeln bestimmt.
- *Not-a-knot-Bedingung*: Zusätzliche stetige dritte Ableitung an der zweiten und der vorletzten Extremstelle (eine kubische Spline-Interpolierende besitzt ansonsten stetige zweite Ableitungen).
- *Natürliche Randbedingung*: Die zweite Ableitung der Interpolierenden Spline-Funktion soll am linken und am rechten Rand gleich null sein (Minimierung der Biegeenergie).

Der Mangel an Informationen über das Signal am Rand des Intervalls kann bei der EMD zum Entstehen von Randeffekten führen. Es werden dann bei den IMF-Komponenten Oszillationen am Rand des Intervalls gebildet, die nicht im Signal vorhandene Oszillationen widerspiegeln, sondern durch den Prozess der Mittelwertfunktionsbildung entstanden sind. In der Praxis hat sich das Abbruchkriterium, das Residuum r_n dürfe höchstens ein Extremum haben, als zu stark erwiesen. Die EMD liefert unter Umständen zu viele IMFs, die zum Teil auch wegen der Randeffekte des EMD-Algorithmus erzeugt werden. Aus diesem Grund legt man in der Praxis meist eine höhere maximale Anzahl der Extrema für das Residuum r_n fest, die für jedes Signal experimentell bestimmt werden muss.

3.3 Weiterentwicklung der Empirical Mode Decomposition

Bei der Empirical Mode Decomposition im Abschnitt 3.2 spielt die Bestimmung der oberen und unteren Einhüllenden eine besonders entscheidende Rolle, gleichzeitig ist aber der Begriff einer Einhüllenden in der Mathematik nicht unproblematisch. Die Definition einer Einhüllenden ist nicht eindeutig. Es können unterschiedliche Typen von Splines verwendet werden, die unterschiedliche Einhüllenden erzeugen. Darüber hinaus ist im Falle der kubischen Spline-Interpolation, die überwiegend für die Bestimmung von Einhüllenden genutzt wird, nicht gewährleistet, dass ein Signal von den kubischen Spline-Interpolierenden seiner Minima und seiner Maxima eingeschlossen wird. Vor diesem Hintergrund wurde in [CHRX06] ein Operator entwickelt, der die Bestimmung von Einhüllenden umgeht und stattdessen aus den Extremstellen direkt eine lokale Mittelwertfunktion als Linearkombination von B-Splines berechnet.

Zunächst wird die Definition der B-Splines benötigt. Sie wurde von Curry und Schoenberg in [CS47] aufgestellt und ist [dB01] entnommen.

Definition 3.3.1. Sei $\theta := (\theta_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine ansteigende Folge reeller Zahlen. Der k -te (normierte) B-Spline der Ordnung m für die Knotenfolge θ ist als

$$B_{k,m}(t) := (\theta_{k+m} - \theta_k) [\theta_k, \dots, \theta_{k+m}] (\cdot - t)_+^{m-1}, \quad t \in \mathbb{R},$$

definiert. Dabei wird mit $[\theta_k, \dots, \theta_{k+m}]g$ die dividierte Differenz einer Funktion g bezeichnet, die rekursiv als

$$\begin{aligned} [\theta_k]g &:= g(\theta_k), \\ [\theta_k, \dots, \theta_{k+m}]g &:= \frac{[\theta_k, \dots, \theta_{k+m-1}]g - [\theta_{k+1}, \dots, \theta_{k+m}]g}{\theta_{k+m} - \theta_k} \\ &\quad \text{für alle } \theta_r \neq \theta_s \text{ mit } r \neq s \text{ und } r, s \in [k, k+m], \\ [\theta_k, \dots, \theta_{k+m}]g &:= \frac{g^{(m)}(\theta_k)}{m!} \quad \text{für } \theta_k = \dots = \theta_{k+m} \text{ und } g \in C^m \end{aligned}$$

definiert ist. Der Ausdruck $(\cdot - t)_+^{m-1}$ bedeutet, dass bei der dividierten Differenz der Funktion $(x - t)_+^{m-1}$ die Variable t fest sein soll und $(x - t)_+^{m-1}$ als Funktion von x mit

$$(x - t)_+^{m-1} := \begin{cases} (x - t)^{m-1} & \text{falls } x \geq t, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

aufgefasst werden soll.

Die B-Splines bilden eine Basis des Raumes aller Splines der Ordnung m mit Knoten θ , und jede Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus diesem Raum lässt sich als Linearkombination der B-Splines

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k B_{k,m}(t)$$

mit eindeutigen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ darstellen. Für die Definition des Operators für Mittelwertfunktionen nach [CHRX06] sei die Knotenfolge $\theta^s := \{\theta_j : j \in \mathbb{Z}\}$ die Folge der Extremstellen eines Signals s . Im Träger eines B-Splines $B_{k,m}$ der Ordnung m für die Knotenfolge θ^s befinden sich die Knoten θ_{k+l} , $l = 0, \dots, m$, und es gilt

$$\begin{aligned} B_{k,m}(t) &= 0 \quad \text{für } t \in \{\theta_k, \theta_{k+m}\}, \\ B_{k,m}(t) &> 0 \quad \text{für } t \in (\theta_k, \theta_{k+m}). \end{aligned}$$

Daher wird an den Extremstellen innerhalb des Trägers $\text{supp}(B_{k,m})$ das lineare Funktional

$$\lambda_{k,m,\theta^s} : s \mapsto 2^{2-m} \sum_{l=1}^{m-1} \binom{m-1}{l} s(\theta_{k+l})$$

definiert, das ein binomiales Mittel der Extremwerte innerhalb des Trägers $\text{supp}(B_{k,m})$ mit stärkerer Gewichtung auf dem Zentrum des Trägers ist. Schließlich sei

$$V_{\theta^s,m}[s] := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_{k,m,\theta^s} B_{k,m} \tag{3.3.1}$$

der Operator, der die lokale Mittelwertfunktion von s aus Gleichung (3.2.3) ersetzt.

Beispiel 3.3.2.

- (i) Für die Ordnung $m = 3$ erhält man die quadratische B-Spline-Approximation

$$V_{\theta^s,3}[s](t) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (s(\theta_{k+1}) + s(\theta_{k+2})) B_{k,3}(t).$$

- (ii) Für die Ordnung $m = 4$ erhält man die in der Praxis am häufigsten genutzte kubische B-Spline-Approximation

$$V_{\theta^s,4}[s](t) = \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (s(\theta_{k+1}) + 2s(\theta_{k+2}) + s(\theta_{k+3})) B_{k,4}(t). \quad (3.3.2)$$

B-Splines der Ordnung m für die Knotenfolge θ erfüllen die Rekursionsformel (siehe [dB01])

$$B_{k,m}(t) = \frac{t - \theta_k}{\theta_{k+m-1} - \theta_k} B_{k,m-1}(t) + \frac{\theta_{k+m} - t}{\theta_{k+m} - \theta_{k+1}} B_{k+1,m-1}(t). \quad (3.3.3)$$

Hierbei sind die Brüche mit verschwindendem Nenner gleich null zu setzen, und für die B-Splines der Ordnung $m = 1$ gilt

$$B_{k,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } \theta_k \leq t < \theta_{k+1}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Ableitung eines B-Splines lässt sich auch rekursiv mit B-Splines niedrigerer Ordnung berechnen,

$$\frac{dB_{k,m}}{dt}(t) = (m-1) \left(\frac{B_{k,m-1}(t)}{\theta_{k+m-1} - \theta_k} - \frac{B_{k+1,m-1}(t)}{\theta_{k+m} - \theta_{k+1}} \right). \quad (3.3.4)$$

Für die Hilbert-Transformation von B-Splines und deren Ableitungen können ebenfalls Rekursionsformeln angegeben werden, was in [CHRX06] gezeigt wurde.

Satz 3.3.3.

- (i) Die Hilbert-Transformation eines B-Splines der Ordnung m für die Knotenfolge θ erfüllt die Rekursionsformel

$$\mathcal{H}[B_{k,m}](t) = \frac{t - \theta_k}{\theta_{k+m-1} - \theta_k} \mathcal{H}[B_{k,m-1}](t) + \frac{\theta_{k+m} - t}{\theta_{k+m} - \theta_{k+1}} \mathcal{H}[B_{k+1,m-1}](t) \quad (3.3.5)$$

mit

$$\mathcal{H}[B_{k,1}](t) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{t - \theta_k}{t - \theta_{k+1}} \right|. \quad (3.3.6)$$

- (ii) Die Ableitung der Hilbert-Transformation eines B-Splines der Ordnung m für die Knotenfolge θ erfüllt die Rekursionsformel

$$\frac{d\mathcal{H}[B_{k,m}]}{dt}(t) = (m-1) \left(\frac{\mathcal{H}[B_{k,m-1}](t)}{\theta_{k+m-1} - \theta_k} - \frac{\mathcal{H}[B_{k+1,m-1}](t)}{\theta_{k+m} - \theta_{k+1}} \right). \quad (3.3.7)$$

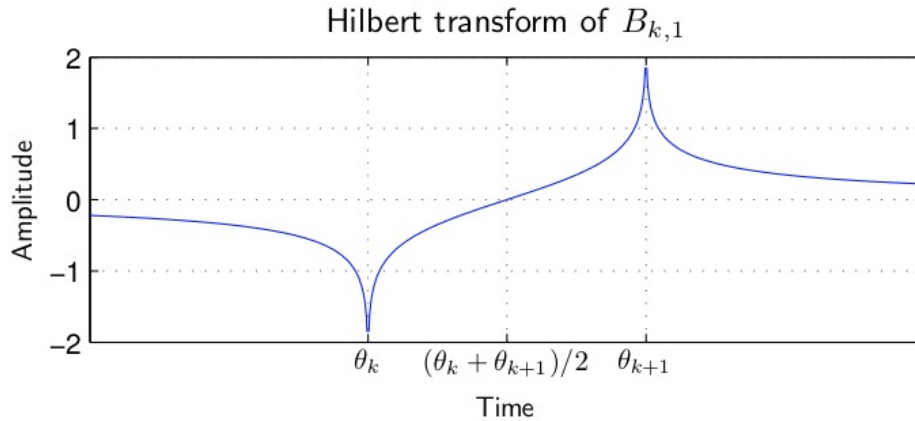


Abbildung 3.2: Hilbert-Transformation eines B-Splines $B_{k,1}$ der Ordnung $m = 1$ aus der Gleichung (3.3.6) mit Knoten θ_k und θ_{k+1}

Der Funktionsverlauf der Hilbert-Transformation eines B-Splines $\mathcal{H}[B_{k,1}]$ der Ordnung $m = 1$ aus der Gleichung (3.3.6) ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Das Vorzeichen der Funktionswerte von $\mathcal{H}[B_{k,1}](t)$ wird später im Kapitel 6 benötigt.

Für die Empirical Mode Decomposition in der klassischen Form aus Abschnitt 3.2, bei der für die Berechnung der lokalen Mittelwertfunktionen (3.2.3) obere und untere Einhüllenden benutzt werden, existieren eine Reihe von frei verfügbaren Programmen. Umfangreich und häufig benutzt wird das von Flandrin bereitgestellte MATLAB/C-Programm [Fla07], das sowohl reellwertige Signale als auch komplexwertige Signale mit der EMD zerlegen kann. Der EMD-Algorithmus für den reellwertigen Fall wird in [RFG03] diskutiert und die Entwicklung einer Methode für den komplexwertigen Fall geschieht in [RFG07]. Reine MATLAB-Programme sind unter [Del07, Mag02], im File Exchange des MATLAB-Central [Tan08, Ort08] und beim Research Center for Adaptive Data Analysis [Wu09] verfügbar. Außerdem existiert ein Programm, das für die Statistik-Software R entwickelt wurde, [KO08], und dessen Funktionsweise in [KO09] dokumentiert ist.

In allen oben genannten frei verfügbaren Programmen ist die klassische EMD implementiert, bei der die Berechnung der Mittelwertfunktion über den Mittelwert der oberen und unteren Einhüllenden geschieht. Bei der Weiterentwicklung der EMD aus diesem Abschnitt entfällt die Bestimmung von Einhüllenden und die Mittelwertfunktion kann direkt aus den Extremstellen gebildet werden. Das vereinfacht und beschleunigt die Berechnung der Mittelwertfunktion. Eine erhebliche Verringerung der Komplexität wurde damit bei der Verallgemeinerung der EMD auf multivariate Signale erreicht (siehe [Koc08]). Aus diesem Grund wurde für diese Arbeit der weiterentwickelte EMD-Algorithmus in MATLAB implementiert. Mit dem MATLAB-Programm werden einige Beispielsignale im kommenden Beispiel 3.3.5 untersucht und im Abschnitt 3.5 hydrologische Zeitreihen analysiert. Der Implementierung des EMD-Algorithmus für ein gegebenes Signal $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liegt der folgende Algorithmus zugrunde.

Algorithmus 3.3.4 (Weiterentwickelte Empirical Mode Decomposition).

```

wähle die Schranke für die Standardabweichung  $\epsilon > 0$ 
wähle die Anzahl der Extremstellen für das Residuum  $n_r \in \mathbb{N}$ 
setze  $r_0 := s$ 
setze Index für äußere Iteration  $j := 0$ 
WHILE (Anzahl der Extremstellen von  $r_j$ )  $> n_r$ 
    berechne lokale Mittelwertfunktion  $m_{j,0}$  von  $r_j$  nach (3.3.2)
    setze  $h_{j,0} := r_j$ 
    setze  $h_{j,1} := h_{j,0} - m_{j,0}$ 
    setze Index für innere Iteration  $k := 1$ 
    WHILE  $SD_{j,k} \geq \epsilon$ 
        berechne lokale Mittelwertfunktion  $m_{j,k}$  von  $h_{j,k}$  nach (3.3.2)
        setze  $h_{j,k+1} := h_{j,k} - m_{j,k}$ 
        inkrementiere Index  $k := k + 1$ 
    setze IMF  $g_{j+1} := h_{j,k}$ 
    setze neues Residuum  $r_{j+1} := r_j - g_{j+1}$ 
    inkrementiere Index  $j := j + 1$ 

```

Die aus der EMD resultierende Zerlegung in IMF-Komponenten wird entscheidend von der Wahl der Konstanten ϵ und n_r im Algorithmus 3.3.4 beeinflusst, deshalb sind im Anhang A sowohl alle wichtigen Eingabeparameter als auch alle wichtigen Ausgabeparameter für jede in dieser Arbeit erwähnte und abgebildete Signalanalyse mit der EMD dokumentiert. Weiterhin wird die Wahl der Konstanten im Abschnitt 3.6 über die Probleme bei der HHT und über offene Fragen zur HHT ausführlich diskutiert.

Beispiel 3.3.5. Die weiterentwickelte EMD des Algorithmus 3.3.4 wird auf synthetische und aus Anwendungen stammende Signale angewandt und die resultierenden Zerlegungen werden betrachtet. In den folgenden Abbildungen sind in den Koordinatensystemen auf der horizontalen Achse die Zeit und auf der vertikalen Achse die Amplituden der Signale bzw. der IMFs aufgetragen.

(i) Das Signal

$$s_1(t) = \sin(10\pi t) + \sin(80\pi t), \quad t \in [0, 1], \quad (3.3.8)$$

besteht aus zwei überlagerten Sinusschwingungen. Es ist periodisch und damit insbesondere stationär. Jeder Summand von s_1 stellt ein Monokomponentensignal mit konstanter Frequenz dar, also wird erwartet, dass die EMD das Signal s_1 in zwei IMF-Komponenten zerlegt. In Abbildung 3.3 sind oben das Signal s_1 und darunter die IMF-Komponenten und das Residuum der EMD dargestellt. Die beiden Summanden von s_1 werden im Inneren des Intervalls $[0, 1]$ auf die ersten beiden IMF-Komponenten aufgeteilt. An den Rändern des Intervalls erzeugt der verwendete Algorithmus Oszillationen,

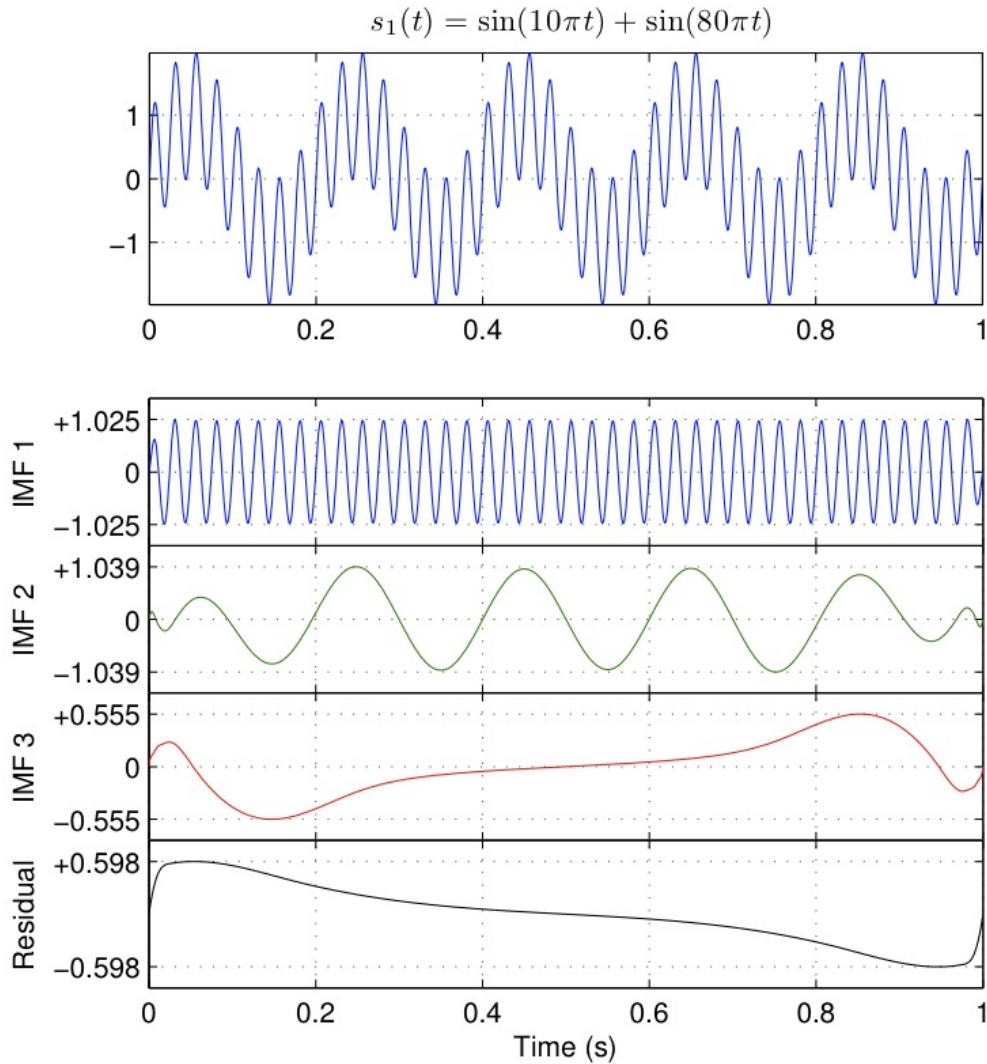


Abbildung 3.3: Zu Beispiel 3.3.5 (i): Zwei überlagerte Sinusschwingungen (oben) und EMD (unten)

die im Signal nicht vorhanden sind. Die Oszillationen sorgen dafür, dass eine dritte IMF erzeugt wird und dass das Residuum nicht konstant null ist. Das Problem mit den Randeffekten wurde in der Bemerkung 3.2.1 bereits erläutert.

(ii) Das Signal s_2 mit variabler Frequenz ist als

$$s_2(t) = \sin(16\pi(\sin(2\pi t) + t)), \quad t \in [0, 1], \quad (3.3.9)$$

definiert. Es besteht aus einem Monokomponentensignal, daher sollte das komplette Signal s_2 in einer IMF-Komponente dargestellt werden können. Im Intervall $[0.5, 1]$ ist der Punktabstand für die Auswertung des Signals s_2 doppelt so groß wie im Intervall $[0, 0.5]$ gewählt. Die EMD ist wie das Signal auch in Abbildung 3.4 zu sehen. Sie er-

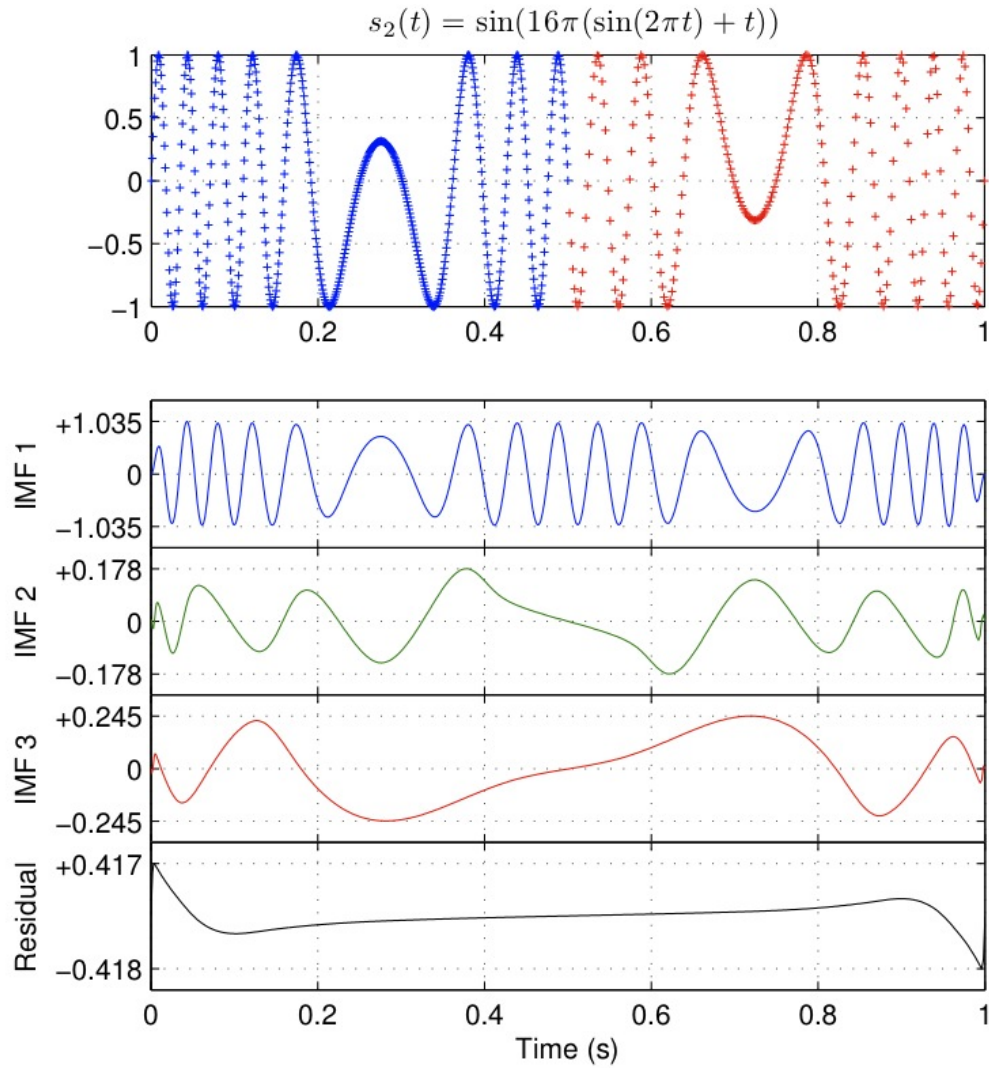


Abbildung 3.4: Zu Beispiel 3.3.5 (ii): Signal mit variabler Phase und einem Sprung in dem Punktabstand für die Auswertung (oben) und EMD (unten)

zeugt and der Sprungstelle $t = 0.5$ einen glatten Verlauf in den IMFs, soweit das anhand der Plots beurteilt werden kann. In der ersten IMF-Komponente wird die variable Phase des Signals s_2 nahezu komplett erfasst. Es sind zwar noch zwei weitere IMFs (IMF 2 und IMF 3) vorhanden, sie haben aber eine um den Faktor zehn geringere Amplitude.

(iii) Das Signal

$$s_3(t) = e^{-30(t-0.5)^2} \sin(160\pi t) + \sin(3\pi t e^{3t}), \quad t \in [0, 1], \quad (3.3.10)$$

setzt sich aus einem Gauß'schen Wellenpaket (erster Summand in (3.3.10)) und einem Chirp, das eine Sinusschwingung mit exponentiell wachsender Phase ist (zweiter Summand in (3.3.10)), additiv zusammen. Beide Summanden sind Monokomponentensignale, allerdings überschneiden sich die Frequenzen der beiden Summanden der Gleichung.

chung (3.3.10). Aus diesem Grund ist zu erwarten, dass der Chirp von der EMD auf unterschiedliche IMF-Komponenten aufgeteilt wird. s_3 und dessen Zerlegung durch die EMD sind in Abbildung 3.5 dargestellt. Das Gauß'sche Wellenpaket findet sich bei der EMD in der ersten IMF im Intervall $[0.3, 0.7]$ wieder. Die IMF 1 geht ca. ab der Stelle $t = 0.7$ in den hochfrequenten Anteil des Chirps über, während der niedrigfrequente Anteil des Chirps in der zweiten IMF-Komponente im Intervall $[0, 0.7]$ zu finden ist. Die Aufteilung des Chirps auf zwei IMFs erzeugt nicht erwünschte weitere IMFs (IMF 3 bis IMF 9), die Oszillationen um die Stelle $t = 0.7$ aufweisen. IMF 3 bis IMF 9 sind nicht erwünscht, weil das Signal s_3 als die Summe zweier Monokomponentensignale gebildet wurde und man daher auch von der EMD eine Zerlegung in zwei IMF-Komponenten erwartet. Außerdem erkennt man an diesem Beispiel, wie sich die durch die Bildung der Mittelwertfunktionen entstandenen Oszillationen am Intervallrand, die bereits in Beispiel (i) beschrieben wurden, vom rechten Rand des Intervalls mit steigender IMF-Komponentenzahl ins Innere des Intervalls fortpflanzen (siehe Bemerkung 3.2.1).

- (iv) Bei den Ultraschallrufen von Fledermäusen entstehen Chirps, wie sie in Abbildung 3.6 (oben) beobachtet werden können. Es sind Ultraschallrufe einer jagenden Fledermaus, die in für das menschliche Ohr hörbare Laute umgewandelt wurden (Quelle: [Nol05]), zu sehen. Es sind drei kurze Impulse in diesem Signal zu erkennen. Fledermausrufe sind dafür bekannt, nichtlinear und nichtstationär zu sein und in der Zeit variierende Frequenzen zu besitzen. Die EMD in Abbildung 3.6 (unten) liefert insgesamt sechs IMF-Komponenten und ein Residuum, das eine geringe Anzahl der additiven Komponenten für dieses komplexe Signal darstellt, und eine Stärke der EMD ist. Die ersten drei IMFs haben eine um eine Zehnerpotenz höhere maximale Amplitude als die letzten drei IMFs, was darauf schließen lässt, dass sie die wesentlichen Informationen des Signals beinhalten und für physikalische Interpretationen relevanter sind.

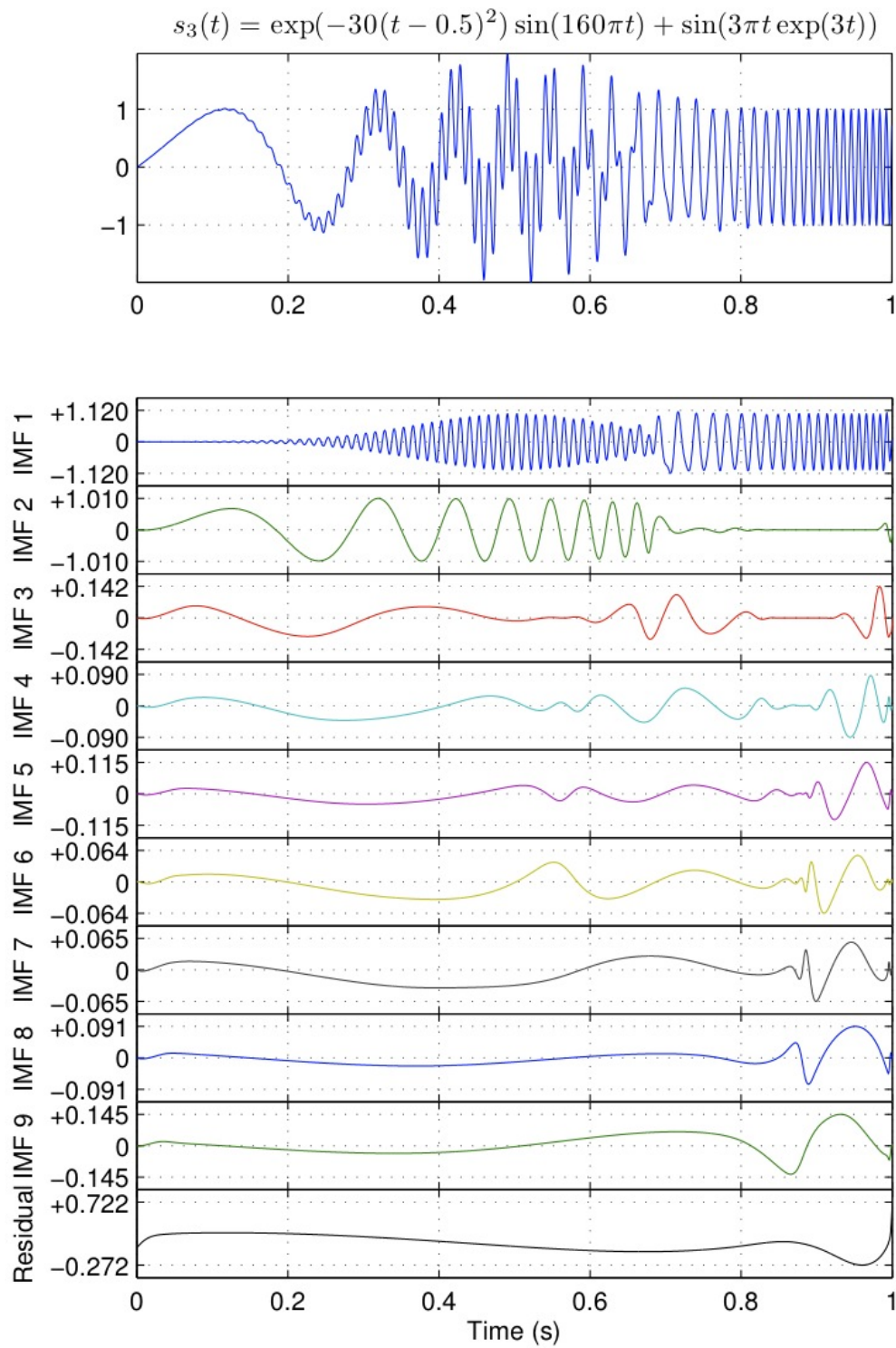


Abbildung 3.5: Zu Beispiel 3.3.5 (iii): Gauß'sches Wellenpaket und Chirp (oben) und EMD (unten)

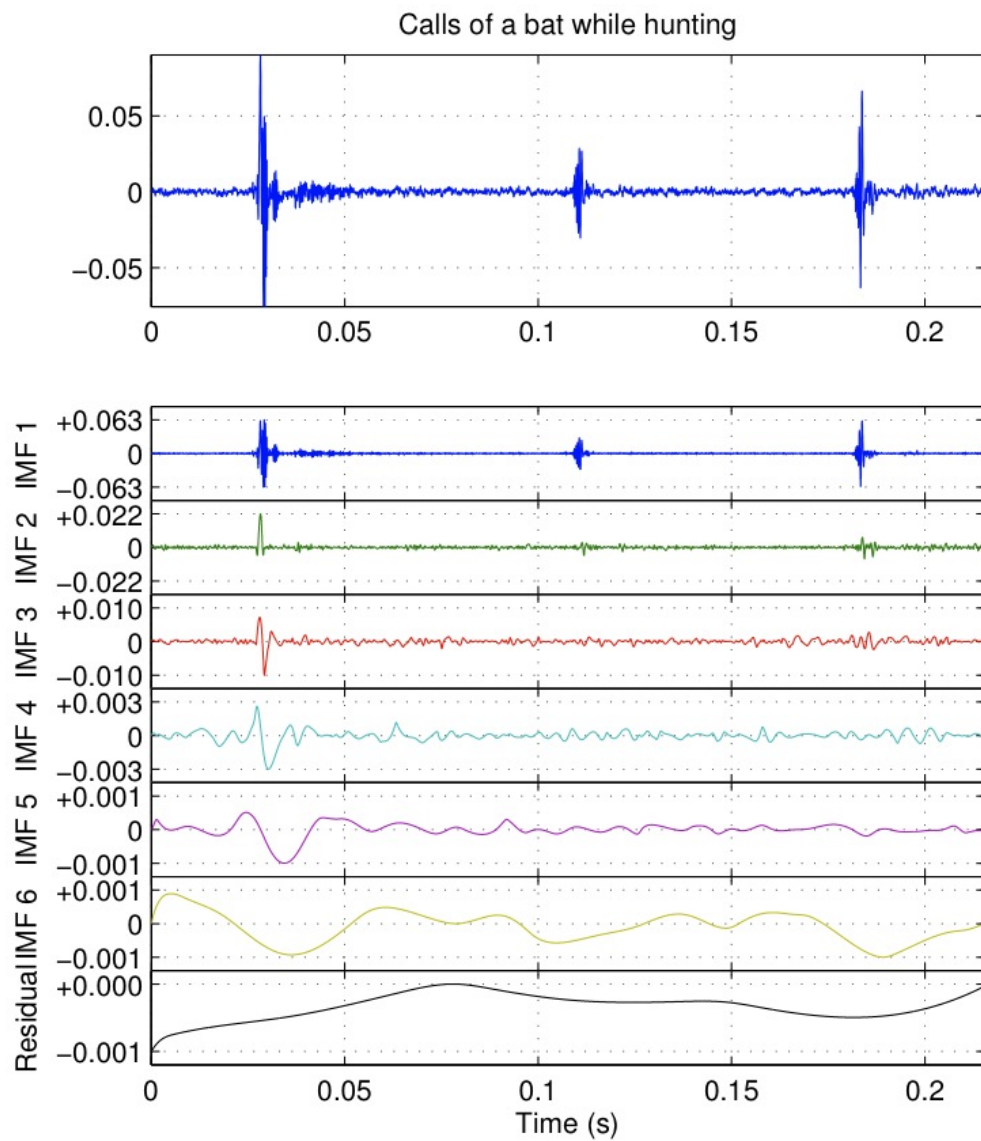


Abbildung 3.6: Zu Beispiel 3.3.5 (iv): Rufe einer Fledermaus (oben) und EMD (unten)

3.4 Hilbert-Spektral-Analyse

Nach dem Zerlegen des reellwertigen Signals s mit der klassischen EMD aus Abschnitt 3.2 oder auch mit der weiterentwickelten EMD aus Abschnitt 3.3 können die instantanen Frequenzen der IMF-Komponenten g_j gemäß Bemerkung 2.7.3 berechnet werden. Dem Vorgehen von Huang et al. in [HSL⁺98], S. 928, folgend, formt man das Signal s mit der Hilbert-Transformation (2.5.1) zu

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{j=1}^n g_j(t) + r_n(t) \\ &= \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \left(g_j(t) + i \mathcal{H} [g_j] (t) \right) + r_n(t) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \exp \left(i \int \omega_j(\tau) d\tau \right) \right) + r_n(t) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

um, wobei a_j die Amplitude von g_j und ω_j die instantane Frequenz von g_j ist. Das Residuum r_n soll hinsichtlich seiner instantanen Frequenz nicht untersucht werden, da es eine monotone Funktion ist und einen Trend darstellt. Zwar würde die Hilbert-Transformation r_n als einen Teil einer längeren Oszillation behandeln, aber die Energie von r_n könnte dann zu stark in den Vordergrund rücken und für die Analyse interessante höhere Frequenzen mit geringerer Energie bedeutungslos erscheinen lassen. Jedoch können physikalische Gründe die Untersuchung von r_n bezüglich dessen instantaner Frequenz rechtfertigen.

Die Gleichung (3.4.1) mit zeitabhängiger Amplitude und zeitabhängiger Frequenz kann als Verallgemeinerung der abgeschnittenen Fourier-Reihe von s ,

$$s(t) = \sum_{j=1}^n a_j \exp(i \omega_j t) + \tilde{r}(t), \quad (3.4.2)$$

mit konstanter Amplitude a_j und konstanter Frequenz ω_j aufgefasst werden. Diese Eigenschaft der HHT ermöglicht eine detaillierte und lokalisierte Signalanalyse und somit auch die Analyse nichtlinearer und nichtstationärer Signale.

Die Hilbert-Spektral-Analyse besteht aus einer dreidimensionalen Visualisierung, die Hilbert-Amplituden-Spektrum genannt wird. Falls die Zeit-Frequenz-Verteilung der Energie eines Signals untersucht werden soll, kann das Hilbert-Amplituden-Spektrum quadriert werden, um das Hilbert-Energie-Spektrum zu erhalten. Die folgende Definition des Hilbert-Amplituden-Spektrums ist [Koc08] entnommen.

Definition 3.4.1. Das *Hilbert-Amplituden-Spektrum* $H(\omega, t)$, oder auch kurz *Hilbert-Spektrum*, eines Signals s der Form (3.4.1) ist eine Zeit-Frequenz-Verteilung der Amplitude, die

als

$$H(\omega, t) = H(\omega(t), t) := \begin{cases} a_1(t) & \text{auf der Kurve } \{(\omega_1(t), t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \\ a_2(t) & \text{auf der Kurve } \{(\omega_2(t), t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \\ \vdots & \vdots \\ a_n(t) & \text{auf der Kurve } \{(\omega_n(t), t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.4.3)$$

definiert ist. Das *Hilbert-Energie-Spektrum* ist als

$$|H(\omega, t)|^2$$

definiert.

Eine weitere Möglichkeit der Visualisierung bietet das marginale Spektrum, das ähnlich zu dem Spektrum der Fourier-Transformation jeder Frequenz einen globalen und zeitunabhängigen Amplitudenwert zuweist.

Definition 3.4.2. Mit dem Hilbert-Amplituden-Spektrum $H(\omega, t)$ wie in (3.4.3) heißt

$$h(\omega) := \int_I H(\omega, t) dt$$

marginales Spektrum eines Signals, wobei das Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ der Träger des Signals ist.

Dieses Spektrum stellt eine akkumulierte Amplitude über die gesamte Zeitspanne des Signals in einem wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne dar. Im Gegensatz dazu bedeutet bei der Fourier-Transformation eine positive Amplitude a zu einer Frequenz ω , dass die Frequenz ω über die gesamte Zeitspanne des Signals mit der Amplitude a andauert (vgl. [HSL⁺98], S. 929 f.).

Beispiel 3.4.3 (Fortsetzung des Beispiels 3.3.5). Für die Zerlegungen der EMD aus dem Beispiel 3.3.5 im Abschnitt 3.3 werden hier die Hilbert-Energie-Spektren berechnet und mit den Wavelet-Energie-Spektren der kontinuierlichen Wavelet-Transformation sowie mit den Spektren der Fourier-Transformation bzw. mit den Spektrogrammen der Short-Time-Fourier-Transformation verglichen. Die Spektrogramme der Short-Time-Fourier-Transformation wurden mit der Funktion `spectrogram` der MATLAB Signal Processing Toolbox erstellt. Die Berechnungen der Wavelet-Energie-Spektren wurden mit Funktionen der MATLAB Wavelet Toolbox in Anlehnung an die Arbeit von Torrence und Compo, [TC98], implementiert. Torrence und Compo haben ein eigenes MATLAB-Programm entwickelt, das unter [TC04] bereitgestellt wird. In den folgenden Abbildungen des Hilbert-Energie-Spektrums, des Wavelet-Energie-Spektrums und des Spektrogramms der Short-Time-Fourier-Transformation ist auf der horizontalen Achse die Zeit und auf der vertikalen Achse die Frequenz aufgetragen. Die Energie wird durch die unterschiedlichen Farben mit einer linearen Skala dargestellt. Das

Spektrum der Fourier-Transformation hat globale und über das Zeitintervall konstante Frequenzen, daher befinden sich in den Abbildungen des Spektrums auf der horizontalen Achse die Frequenzen und auf der vertikalen Achse die zugehörige Energie.

(i) Das Hilbert-Energie-Spektrum des Signals

$$s_1(t) = \sin(10\pi t) + \sin(80\pi t), \quad t \in [0, 1],$$

aus Beispiel 3.3.5 (i) ist in Abbildung 3.7 (a) dargestellt. Die beiden Sinusschwingungen des Signals haben konstante Amplituden und konstante Frequenzen von 5 Hz und 40 Hz. Sie sind im Hilbert-Energie-Spektrum als konstante Geraden mit (bis auf Randeffekte) fester Amplitude zu erkennen. Die in Beispiel 3.3.5 (i) beschriebenen Randeffekte machen sich auch im Hilbert-Energie-Spektrum, vor allem bei der 5-Hz-Schwingung, deutlich bemerkbar. Das Wavelet-Energie-Spektrum in Abbildung 3.7 (b) bietet eine klare Darstellung der Zeit-Frequenz-Verteilung der Energie, wobei die Lokalisierung der niedrigeren Frequenz von 5 Hz deutlich schärfer ist. Auch bei dieser Methode sind Randeffekte in Form von abfallenden Amplituden festzustellen. Weil s_1 stationär ist, liefert dessen Fourier-Transformation in Abbildung 3.7 (c) eine eindeutige Aussage über die beiden in s_1 enthaltenen Frequenzen. Dieses Ergebnis war zu erwarten, da s_1 aus Basisfunktionen der Fourier-Entwicklung zusammengesetzt ist.

(ii) Bei dem Signal

$$s_2(t) = \sin(16\pi(\sin(2\pi t) + t)), \quad t \in [0, 1],$$

mit variierender Frequenz ist die EMD in der Lage, beinahe das komplette Signal in der ersten IMF abzubilden. Die IMF 1 hat in dem Hilbert-Energie-Spektrum in Abbildung 3.8 (a) demnach auch die höchste Energie. Der Sprung in dem Punktabstand für die Auswertung des Signals an der Stelle $t = 0.5$ bewirkt in dem Hilbert-Energie-Spektrum leichte Oszillationen der Frequenz. Die Wavelet-Transformation und die Short-Time-Fourier-Transformation mussten wegen der unterschiedlichen Punktabstände für die Intervallabschnitte $[0, 0.5]$ und $[0.5, 1]$ separat ausgeführt werden. Das Wavelet-Energie-Spektrum in Abbildung 3.8 (b) ist symmetrisch bezüglich der vertikalen Geraden an der Stelle $t = 0.5$. Es zeigt keinen so scharfen Verlauf wie das Hilbert-Energie-Spektrum und besitzt jeweils für beide Intervallabschnitte drei Energieschwerpunkte, die an den Stellen $t \in \{0.2, 0.4\}$ bzw. $t \in \{0.6, 0.8\}$ voneinander abgetrennt zu sein scheinen. An den Rändern der Intervallabschnitte ist ein Verschmieren in der Frequenzachse festzustellen. Die Ränder werden bei dem Spektrogramm der Short-Time-Fourier-Transformation in Abbildung 3.8 (c) um die Fensterbreite, in diesem Fall sind es 128 Punkte, abgeschnitten. Das Fourier-Spektrogramm hat eine nochmals deutlich geringere Auflösung als das Wavelet-Energie-Spektrum. In diesem Beispiel mit einem uniformen Punktabstand auf den Intervallabschnitten konnten die Wavelet-Transformation und die Short-Time-Fourier-Transformation noch eingesetzt werden, aber ihr Einsatz wäre bei einem nichtuni-

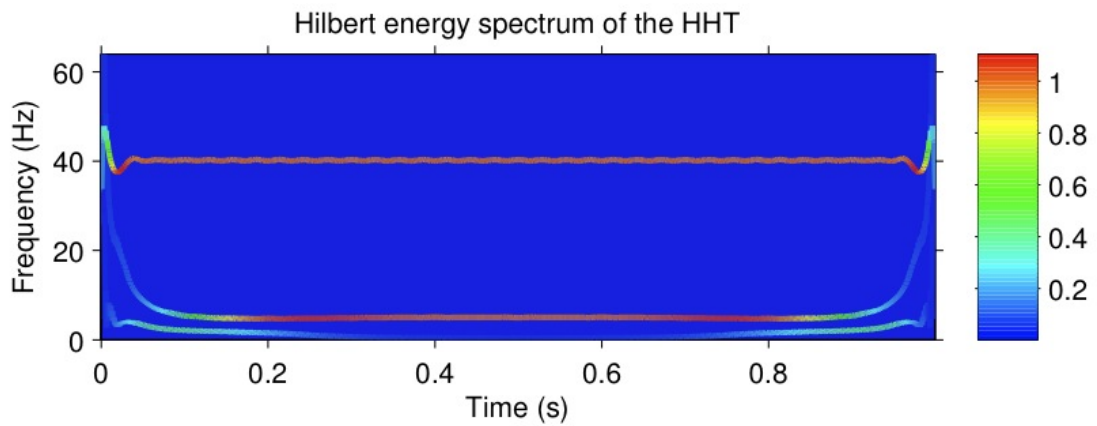
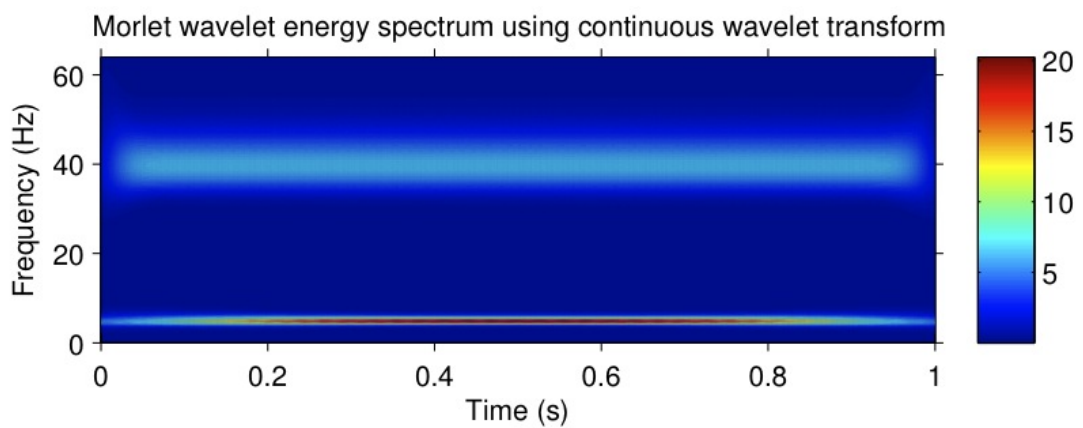
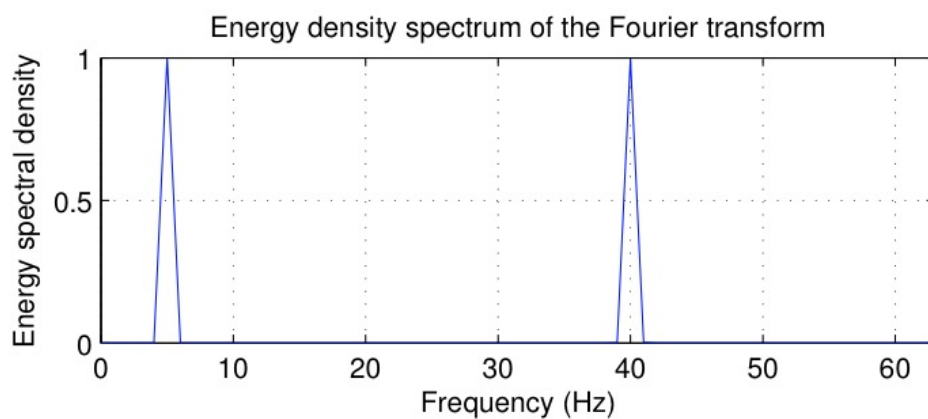

(a) Hilbert-Energie-Spektrum von s_1

(b) Wavelet-Energie-Spektrum von s_1 bezüglich des komplexwertigen Morlet-Wavelets

(c) Spektrum der Fourier-Transformation von s_1

Abbildung 3.7: Zu Beispiel 3.4.3 (i): Vergleich zwischen dem Hilbert-Energie-Spektrum (a), dem Wavelet-Energie-Spektrum (b) und dem Spektrum der Fourier-Transformation (c) des Signals s_1

formen Punktabstand im Gegensatz zur Hilbert-Huang-Transformation nicht möglich.

- (iii) Die Abbildung 3.9 (a) zeigt das Hilbert-Energie-Spektrum des Signals

$$s_3(t) = e^{-30(t-0.5)^2} \sin(160\pi t) + \sin(3\pi t e^{3t}), \quad t \in [0, 1].$$

Die Überlagerung ähnlicher Frequenzen im Signal um die Stelle $t = 0.7$ herum führt zu unerwünschten Oszillationen im Hilbert-Energie-Spektrum, während die restliche Energieverteilung in der Zeit-Frequenz-Ebene sehr genau die tatsächlichen Verhältnisse wiedergibt. Die Randeffekte der EMD, durch die zusätzliche IMFs erzeugt wurden, sind im Hilbert-Energie-Spektrum wegen der geringen Amplituden der IMFs kaum noch zu erkennen. Bei dem Wavelet-Energie-Spektrum in Abbildung 3.9 (b) und bei dem Fourier-Spektrogramm in Abbildung 3.9 (c) treten nur sehr geringe bzw. keine Oszillationen um die Stelle $t = 0.7$ auf. Beide Methoden besitzen eine ähnlich klare und gut aufgelöste Darstellung wie das Hilbert-Energie-Spektrum.

- (iv) Schließlich werden die drei unterschiedlichen Analysemethoden anhand von realen Messdaten verglichen. Die Rufe einer Fledermaus wurden im Beispiel 3.3.5 (iv) mit der EMD zerlegt. Das Hilbert-Energie-Spektrum in Abbildung 3.10 (a) und das Wavelet-Energie-Spektrum in Abbildung 3.10 (b) zeigen eine bessere Lokalisierung in der Zeit als das Spektrogramm der Short-Time-Fourier-Transformation in Abbildung 3.10 (c). Bei der Short-Time-Fourier-Transformation könnte mit einer geringeren Fensterbreite die Auflösung in der Zeit zu Lasten der Auflösung in der Frequenz verbessert werden. Weiterhin zeigen die drei Plots beim ersten Impuls ca. an der Stelle $t = 0.03$ unterschiedliche Verhalten. Das Hilbert-Energie-Spektrum besitzt dort eine deutlich höhere Energiedichte zwischen den Frequenzen 1000 Hz und 1500 Hz als das Wavelet-Energie-Spektrum und das Fourier-Spektrogramm. Das Wavelet-Energie-Spektrum und das Fourier-Spektrogramm zeigen dafür eine höhere Energiedichte unter 1000 Hz, wobei das Fourier-Spektrogramm stärker ausschlägt als das Wavelet-Energie-Spektrum. Das Wavelet-Energie-Spektrum weist eine zunehmende zeitliche Verbreiterung der Energie für niedriger werdende Frequenzen von 1000 Hz bis 0 Hz auf, welches auf den breiteren Träger der Wavelets für niedrige Frequenzen zurückzuführen sein könnte.

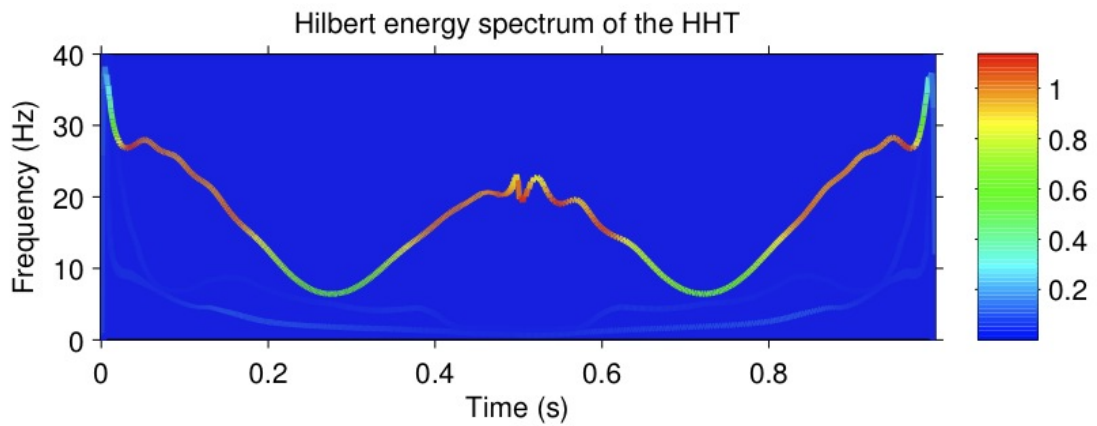
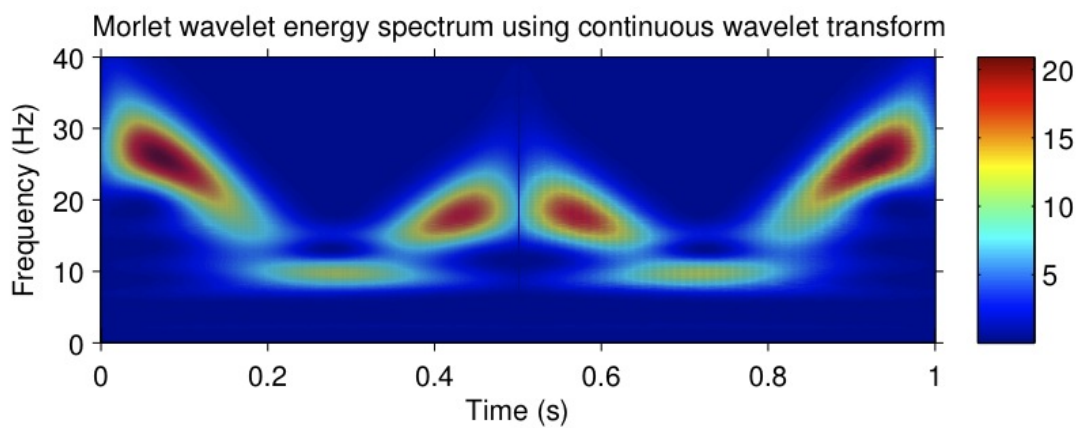
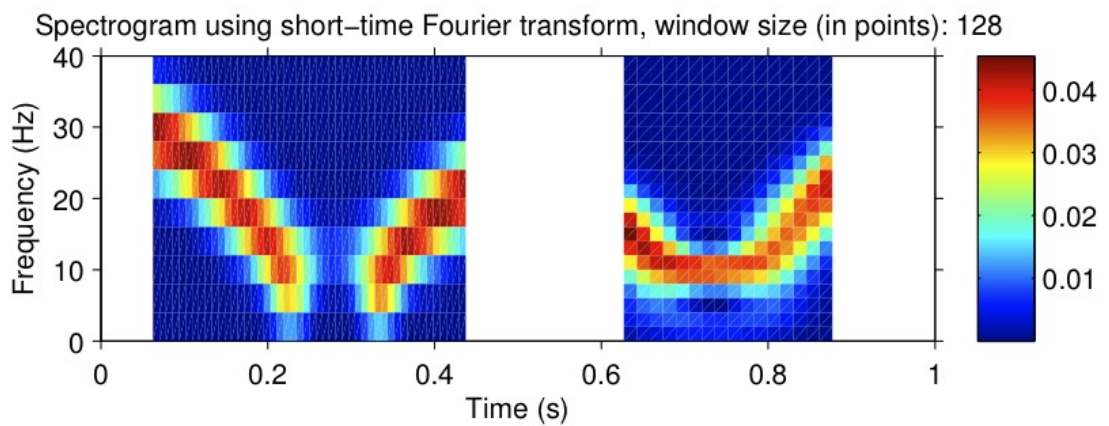

(a) Hilbert-Energie-Spektrum von s_2

(b) Wavelet-Energie-Spektrum von s_2 bezüglich des komplexwertigen Morlet-Wavelets

(c) Spektrogramm der Short-Time-Fourier-Transformation von s_2

Abbildung 3.8: Zu Beispiel 3.4.3 (ii): Vergleich zwischen dem Hilbert-Energie-Spektrum (a), dem Wavelet-Energie-Spektrum (b) und dem Spektrogramm der Short-Time-Fourier-Transformation (c) des Signals s_2

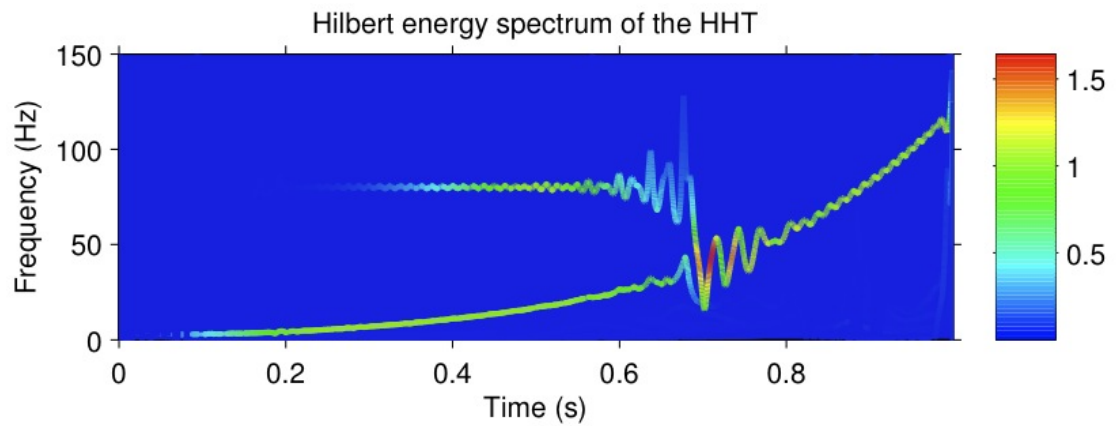
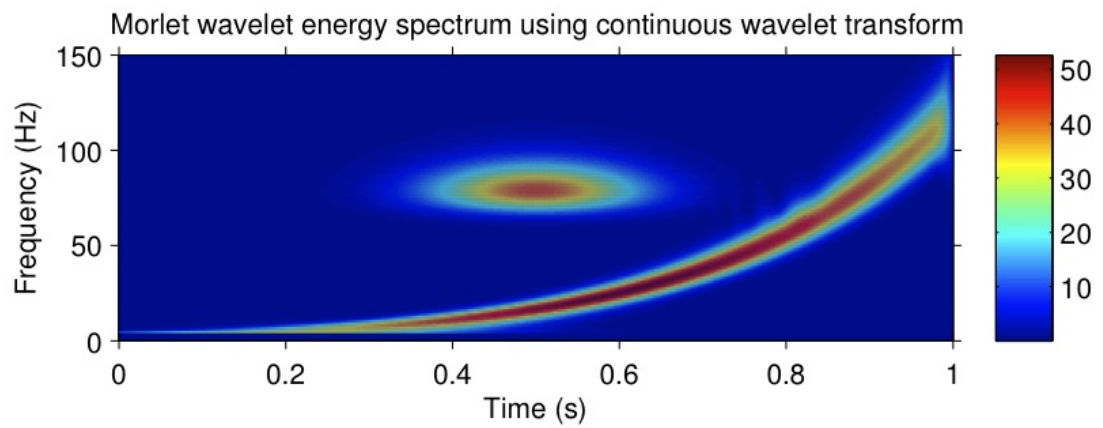
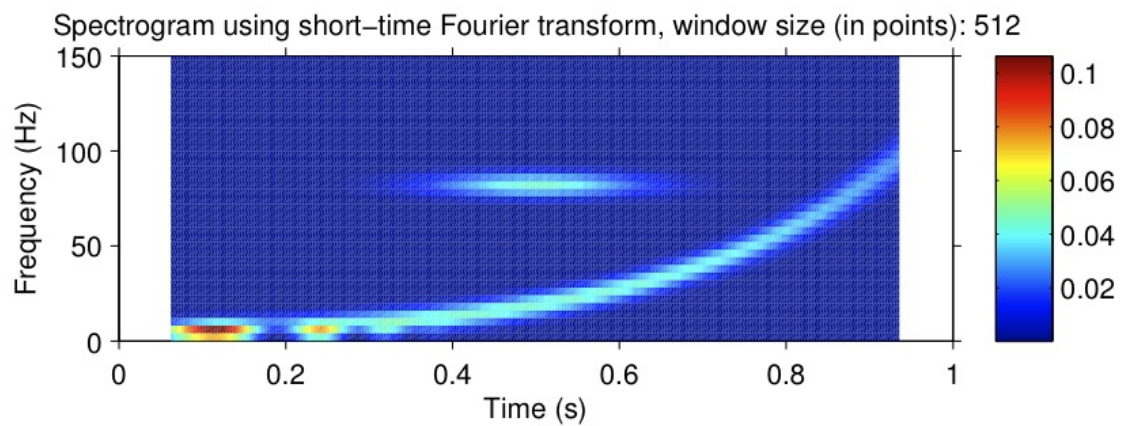
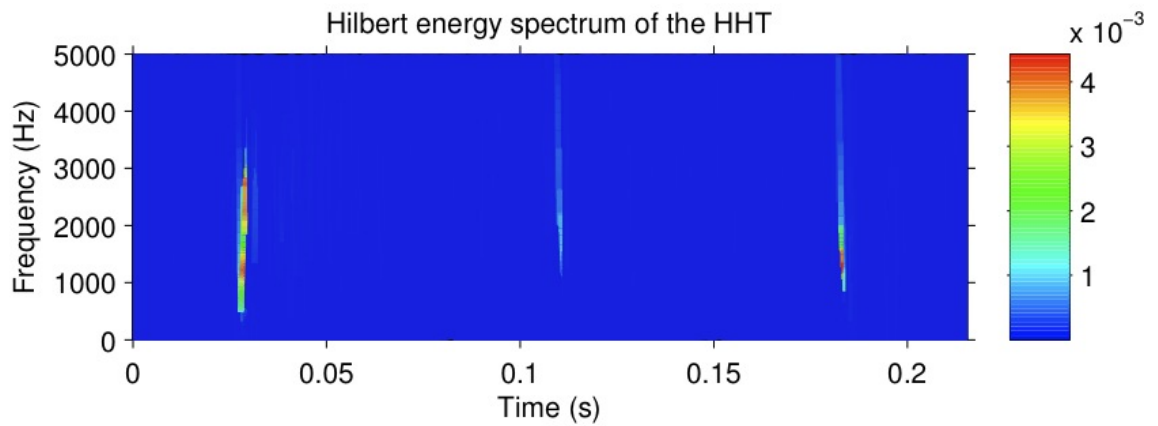
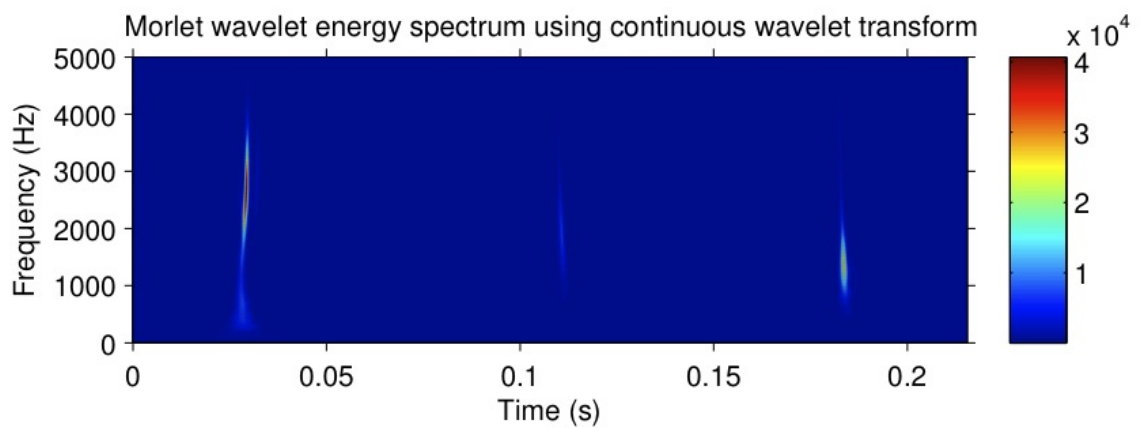

(a) Hilbert-Energie-Spektrum von s_3

(b) Wavelet-Energie-Spektrum von s_3 bezüglich des komplexwertigen Morlet-Wavelets

(c) Spektrogramm der Short-Time-Fourier-Transformation von s_3

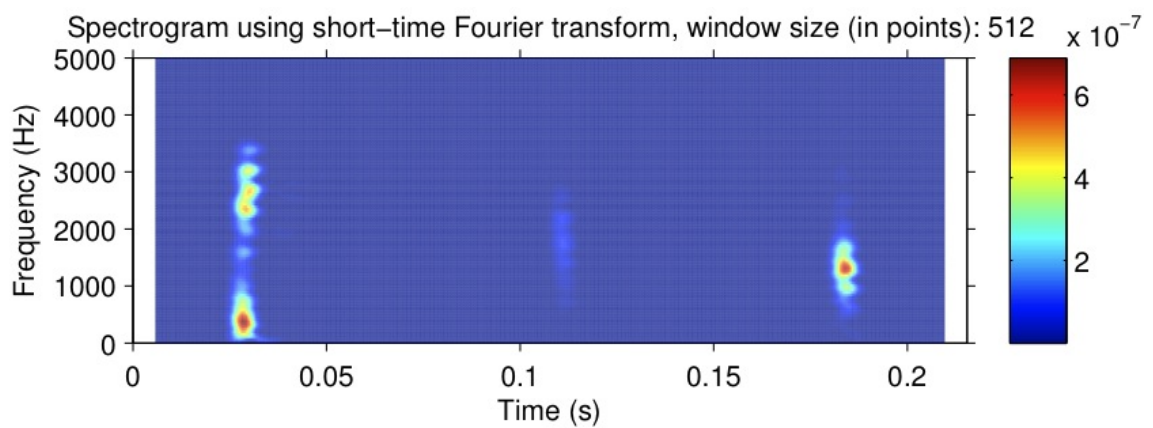
Abbildung 3.9: Zu Beispiel 3.4.3 (iii): Vergleich zwischen dem Hilbert-Energie-Spektrum (a), dem Wavelet-Energie-Spektrum (b) und dem Spektrogramm der Short-Time-Fourier-Transformation (c) des Signals s_3



(a) Hilbert-Energie-Spektrum der Fledermausrufe



(b) Wavelet-Energie-Spektrum der Fledermausrufe bezüglich des komplexwertigen Morlet-Wavelets



(c) Spektrogramm der Short-Time-Fourier-Transformation der Fledermausrufe

Abbildung 3.10: Zu Beispiel 3.4.3 (iv): Ein Vergleich zwischen dem Hilbert-Energie-Spektrum (a), dem Wavelet-Energie-Spektrum (b) und dem Spektrogramm der Short-Time-Fourier-Transformation (c) der Fledermausrufe

3.5 Anwendung der HHT: Analyse hydrologischer Zeitreihen

Die Hilbert-Huang-Transformation wird in diesem Abschnitt auf reale Messdaten angewandt und diskutiert. Es werden Messungen von Wasserabflüssen betrachtet, die von Hydrologen im Rahmen des Projekts C1 für „Spatio-temporal variability of catchment properties and their effect on water, solute, and CO₂ fluxes from the micro- to the mesoscale“ des SFB/TR 32 „Patterns in soil-vegetation-atmosphere-systems: monitoring, modelling and data assimilation“, das von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) finanziert wird, bereitgestellt wurden. Die in diesem Abschnitt vorgestellten Ergebnisse sind ebenfalls in [RPJ⁺10] zu finden. Sie werden hier in einer ausführlicheren und aktualisierten Form und mit zusätzlichen neuen Grafiken dargestellt.

In einem ca. 2354 km² großen, im Westen Deutschlands, 25 km südöstlich von Aachen, und zum Teil in Belgien gelegenen Gebiet wurde der Wasserabfluss gemessen. Für die Messung der Wassermenge, die in Flüssen aus dem überwachten Gebiet strömt, wurden an den drei Standorten Dedenborn, Erkersruhr und Rollesbroich Abflussmessstationen errichtet und tägliche Messungen über einen Zeitraum von 20 bis 40 Jahren durchgeführt. Die Lage der Abflussmessstationen kann der Abbildung 3.11 entnommen werden und die Charakteristik der zu den Abflussmessstationen zugehörigen Niederschlagsgebiete wird in Tabelle 3.1 beschrieben. Weitere Informationen sind in [BHH⁺05] und [BKS⁺05] zu finden.

In Abbildung 3.12 (a) sind die Abflüsse aller drei Messstationen von 1990 bis 1999 zu sehen. Die generelle Abflusscharakteristik ist bei allen Stationen ähnlich. Hohe Werte wurden in den Wintermonaten gemessen, während im Sommer niedrige Abflüsse vorherrschten. Der höchste gemessene Wert war am 22. Dezember 1991 (Rollesbroich: 41.35 mm/Tag), daher ist in Abbildung 3.12 (b) dieses Ereignis detaillierter dargestellt. Der niedrigste Abflusswert im Zeitraum 1990 bis 1999 wurde am 29. Juni 1999 (Dedenborn: 0.0188 mm/Tag) verzeichnet.

Zunächst wird in Abbildung 3.13 die EMD des Abflusses von Dedenborn für den zehnjährigen Zeitraum von 1990 bis 1999 abgebildet. Zu diesem Datensatz werden das Hilbert-Energie-Spektrum, das Wavelet-Energie-Spektrum der kontinuierlichen Wavelet-Transformation und das Spektrogramm der Short-Time-Fourier-Transformation in Abbildung 3.14 miteinander verglichen. Das Wavelet-Energie-Spektrum wurde bezüglich des Morlet-Wavelets und des Mexican-Hat-Wavelets berechnet. Es werden von nun an in diesem Abschnitt die Abkürzungen Hilbert-Spektrum, Wavelet-Spektrum und Fourier-Spektrogramm verwendet. Auf der horizontalen Achse sind die Jahresanfänge und auf der vertikalen Achse ist der Kehrwert der Frequenz, d. h. die Periode, in logarithmischer Skala aufgetragen. Die Energie wird durch eine lineare Farbskala abgebildet. In allen Spektren und in dem Spektrogramm sind jährlich vorkommende kurze Ereignisse zu sehen, die um die Jahreswende in den Wintermonaten stattfinden. Um die zeitlich kurzen Ereignisse für einen Vergleich der unterschiedlichen Zeit-Frequenz-Analysemethoden besser beurteilen zu können, wird die EMD, die oben genannten

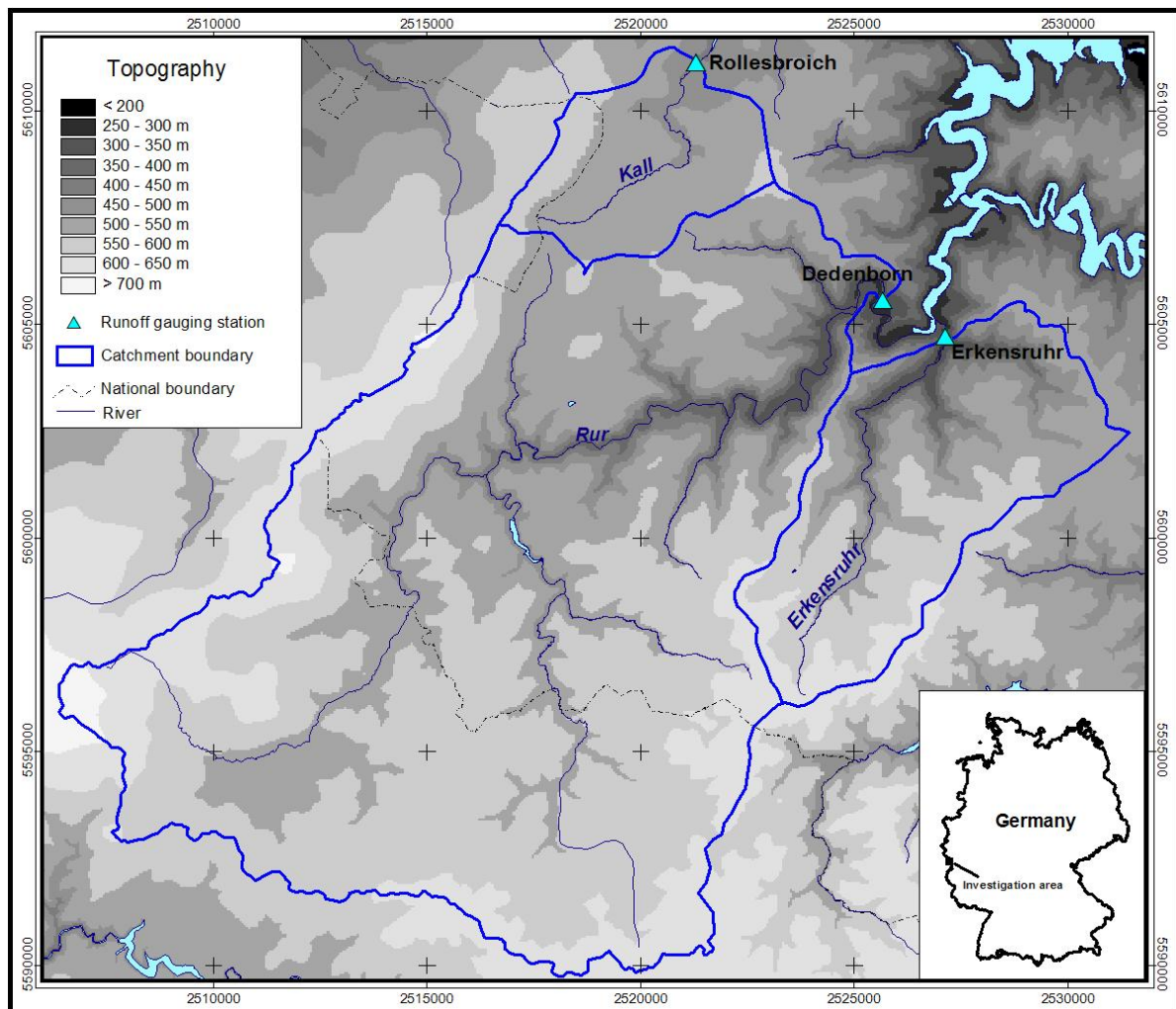
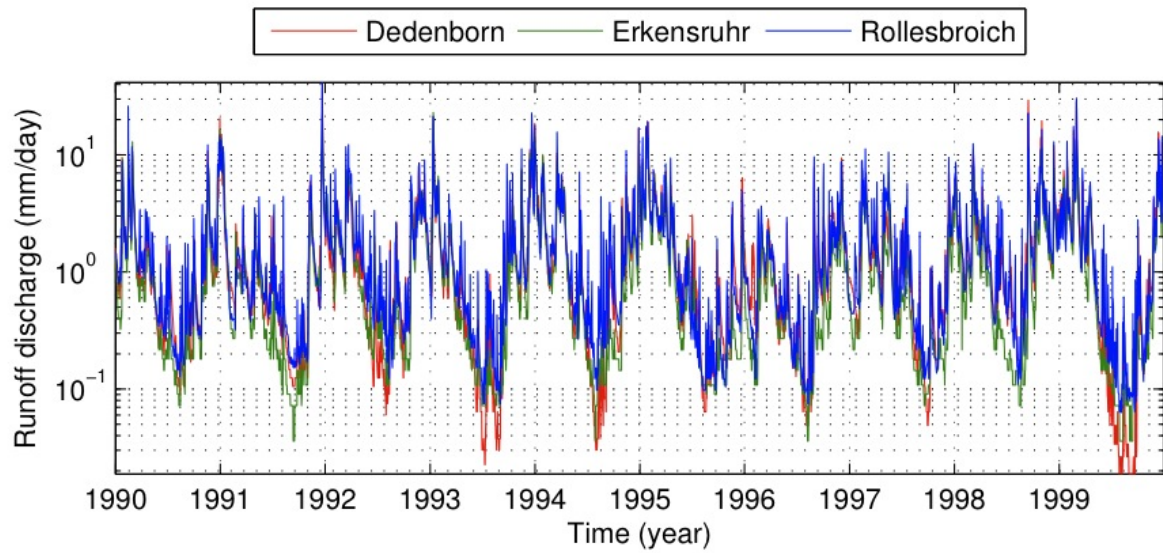


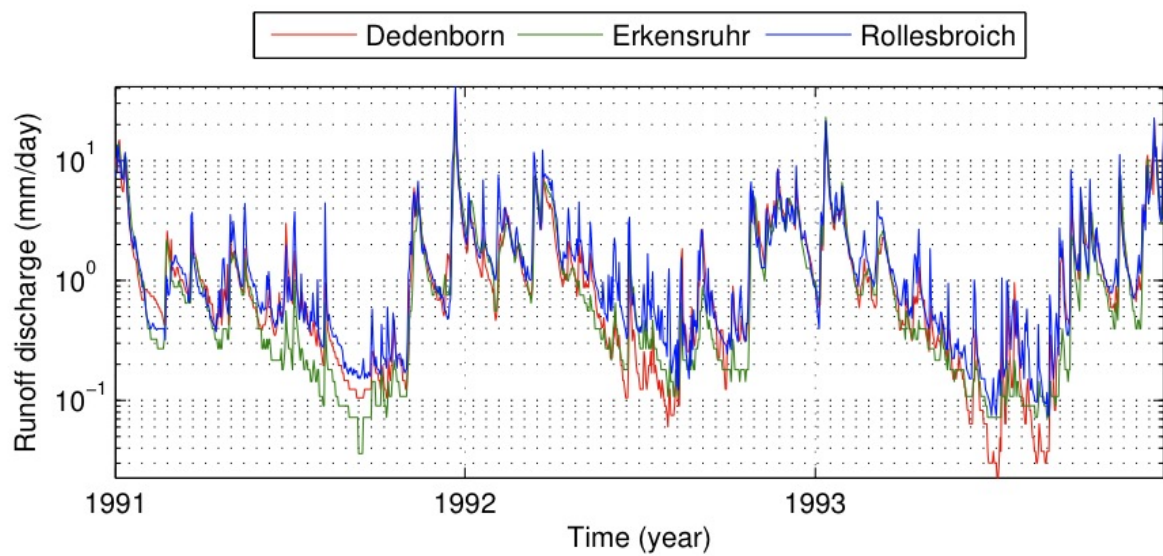
Abbildung 3.11: Lage der Abflussmessstationen Dedenborn, Erkersruhr und Rollesbroich und ihre Niederschlagsgebiete

Tabelle 3.1: Charakteristik der Niederschlagsgebiete

		Upper Rur River	Kall River	Erkensruhr River
Gauging station		Dedenborn	Rollesbroich	Erkensruhr
Area (km ²)		199.7	19.03	41.7
Mean elevation (m)		553	532	526
Mean slope (°)		36.4	17.3	32.1
Land-use (%) (year 2001)	urban	2	3	< 1
	arable land	4	13	10
	grassland	35	45	16
	raised bogs	29	0	0
	forest	30	39	74
Geology (%) (HK100)	Palaeozoic	89	94	96
	Pleistocene	1	0	1
	Holocene	10	6	3
Annual	mean	1042	1200	1081
precipitation (mm/a) (years 1979–1999)	min	908	1133	932
	max	1413	1266	1219
Annual runoff (mm/a)		793	733	633
Sampling interval (years)		1961–2000	1982–2000	1961–2000



(a) Abflussdaten der drei Messstationen von 1990 bis 1999



(b) Abflussdaten der drei Messstationen von 1991 bis 1993

Abbildung 3.12: Abflussdaten der drei Messstationen Dedenborn, Erkersruhr und Rollesbroich

Spektren und das Spektrogramm für die Abflussdaten von Dedenborn für den dreijährigen Zeitraum von 1991 bis 1993 berechnet und in den Abbildungen 3.15 und 3.16 dargestellt.

Die Zeit-Frequenz-Verteilung der Energie stellt sich im Fourier-Spektrogramm anders dar als in den Hilbert- und den Wavelet-Spektren. Es können nur Perioden in einem beschränkten Bereich von 2 bis 128 Tagen erfasst werden. Der Bereich hängt von der Größe des für die Short-Time-Fourier-Transformation benutzten Fensters ab. Die meiste Energie ist in den höchsten dargestellten Perioden zwischen 64 und 128 Tagen zu finden. Es stellte sich in weiteren Tests mit anderen Fensterbreiten heraus, dass die meiste Energie generell den höchsten Perioden zugeordnet wurde. Das führt dazu, dass das Fourier-Spektrogramm für die Analyse dieser Daten und für physikalische Interpretationen nicht genutzt werden kann, sodass es in weiteren Vergleichen nicht mehr berücksichtigt wird.

Das Hilbert-Spektrum und die beiden Wavelet-Spektren widersprechen sich dagegen nicht und können qualitativ miteinander verglichen werden. Die jährlichen Ereignisse werden bei allen Spektren zeitlich übereinstimmend abgebildet. Die beste Lokalisierung in der Zeit liefern das Hilbert-Spektrum zusammen mit dem Mexican-Hat-Wavelet-Spektrum. Letzteres weist aber eine ungenaue Lokalisierung von Frequenzen auf, denn die jährlichen Ereignisse sind als langgezogene vertikale Linien dargestellt. Die Lokalisierung von Frequenzen fällt in dem Hilbert-Spektrum und in dem Wavelet-Spektrum mit dem Morlet-Wavelet genauer aus. Der Unterschied, dass das Mexican-Hat-Wavelet eine schmalere zeitliche Ausdehnung, jedoch eine breitere spektrale Ausdehnung als das Morlet-Wavelet besitzt, wird auch in [TC98], S. 66 f., festgestellt. Bei einem Vergleich der Frequenzen des Hilbert-Spektrums und der Wavelet-Spektren fallen Unterschiede bei langen Perioden von 32 bis 256 Tagen auf. Vor allem bei dem Ereignis am 22. Dezember 1991, dem höchsten im Zeitraum von 1990 bis 1999 gemessenen Abfluss, schlägt das Hilbert-Spektrum bis zur längsten Periode von 256 Tagen aus. In der Detailansicht in Abbildung 3.16 ist zu erkennen, dass weder das Morlet-Wavelet-Spektrum noch das Wavelet-Spektrum mit dem Mexican-Hat-Wavelet diese Verteilung der Energie besitzen. Eine mögliche Erklärung für dieses Verhalten des Hilbert-Spektrums könnte ein Zoom der Spektren auf den 22. Dezember 1991 in Abbildung 3.17 liefern. In dieser Abbildung ist das besagte Datum zentriert worden und es ist die Umgebung von 128 Tagen vor und 128 Tagen nach dem Datum zu sehen. In Abbildung 3.17 ist oben das Signal mit einer Visualisierung der Periodenlänge im Signalverlauf dargestellt. Zwei mit derselben Zahl n gekennzeichnete schwarze vertikale Linien begrenzen ein Intervall der Länge n und stellen somit die Periode n dar. Darunter befinden sich das Hilbert-Spektrum und die Wavelet-Spektren mit äquivalenten Vergrößerungen der Zeitachse. In dieser Darstellung des Hilbert-Spektrums ist nun zu erkennen, warum es bis zur Periode von 256 Tagen ausschlägt, während die Wavelet-Spektren keine nennenswerte Energie über der Periode von 64 Tagen besitzen. Das Hilbert-Spektrum hat an dieser Stelle eine stark oszillierende Frequenz in der ersten IMF, die um die Periode von 64 Tagen oszilliert. In dieser Abbildung wird darüber hinaus der oben beschriebene Unterschied zwischen der zeitlichen und der spektralen Ausdehnung des Morlet- und des Mexican-Hat-Wavelets besonders deutlich. Weiterhin verdeutlicht sie die Plausibilität der Zeit-Frequenz-

Darstellungen mit den abgebildeten Spektren, da innerhalb der in den Spektren angegebenen Perioden das Signal entsprechende Variationen aufweist.

Die jährlich im Winter auftretenden einzelnen Ereignisse mit erhöhtem Abfluss wurden bereits angesprochen. Dieser erhöhte Wasserabfluss tritt meistens in einer einzigen kurzen Zeitspanne zum Jahreswechsel auf und ist bereits an den Messdaten zu erkennen. Außer einem periodischen Muster für die Jahre und Jahreszeiten kann dem Hilbert-Spektrum und den Wavelet-Spektren entnommen werden, dass die jährlichen Ereignisse eine erhöhte Energiedichte in gewissen Perioden aufweisen. Die Ereignisse bewegen sich in einem Schlauch zwischen den Perioden von 4 bis 64 Tagen. In Ausnahmefällen wie im Winter 1993/1994 können sie Perioden von 128 Tagen erreichen. Von 1990 bis 1995 findet jedes Jahr ein einzelner erhöhter Wasserabfluss, der sich innerhalb einer Periode von 4 bis 16 Tagen vollzieht, statt. Ab 1995 geht der Abfluss insgesamt ebenso wie die jährlichen Höchstwerte zurück. Im Winter 1998/1999 steigt der Wasserabfluss wieder an und die Ereignisse mit erhöhtem Wasserabfluss kommen sogar mehrfach innerhalb eines Winters vor. Zusätzlich zu den kurzen starken Schüben sind jährlich geringere Abflüsse mit einer Periode von 16 bis 64 Tagen zu beobachten. Es kann also eine Überlagerung eines Prozesses langsamer Periodizität mit vergleichsweise geringem Abfluss und eines Prozesses schneller Periodizität mit hohem Abfluss beobachtet werden.

Für den Fall, dass in einem Signal Ereignisse mit einer hohen Periode, d. h. einer niedrigen Frequenz, genauer untersucht werden sollen, bietet die Hilbert-Huang-Transformation die Möglichkeit, für jede IMF ein separates Hilbert-Spektrum zu erstellen. Das ist in Abbildung 3.18 für die Hilbert-Spektren der Abflussdaten von Dedenborn von 1991 bis 1993 zu sehen. Es lässt sich erkennen, in welche Moden mit welchen unterschiedlichen Perioden das Signal aufgeteilt werden kann. Möglicherweise enthalten die Messdaten, die man untersuchen möchte, ein Rauschen, das zu dominant im Hilbert-Spektrum dargestellt wird. Verrauschte Messdaten können untersucht werden, indem eine grobe Approximation des Signals ohne den Einfluss schnell schwingender IMFs betrachtet wird. Dazu wird aus der EMD eines Signals s (siehe Gleichung (3.2.1)) für ein $m > 1$ die Approximation

$$\tilde{s}(t) = \sum_{j=m}^n g_j(t) + r_n(t)$$

des Signals s gebildet. Eine Approximation der Abflussdaten von Dedenborn von 1991 bis 1993 mit $m = 2$ ist in Abbildung 3.19 (a) zu sehen. Zu dieser Approximation kann das Hilbert-Spektrum berechnet werden, das in Abbildung 3.19 (b) dargestellt ist.

Schließlich werden die Hilbert-Spektren aller drei Messstationen Dedenborn, Erkensruhr und Rollesbroich betrachtet. Es wird eine einheitliche Farbskala für die Energie benutzt, um die Spektren miteinander vergleichen zu können. In Abbildung 3.20 sind die Hilbert-Spektren für den zehnjährigen Zeitraum von 1990 bis 1999 und in Abbildung 3.21 für den dreijährigen Zeitraum von 1991 bis 1993 dargestellt. Die Hilbert-Spektren bestätigen die ähnliche Abflusscharakteristik der drei Messstationen. Die kurzen Ereignisse mit erhöhtem Wasserabfluss

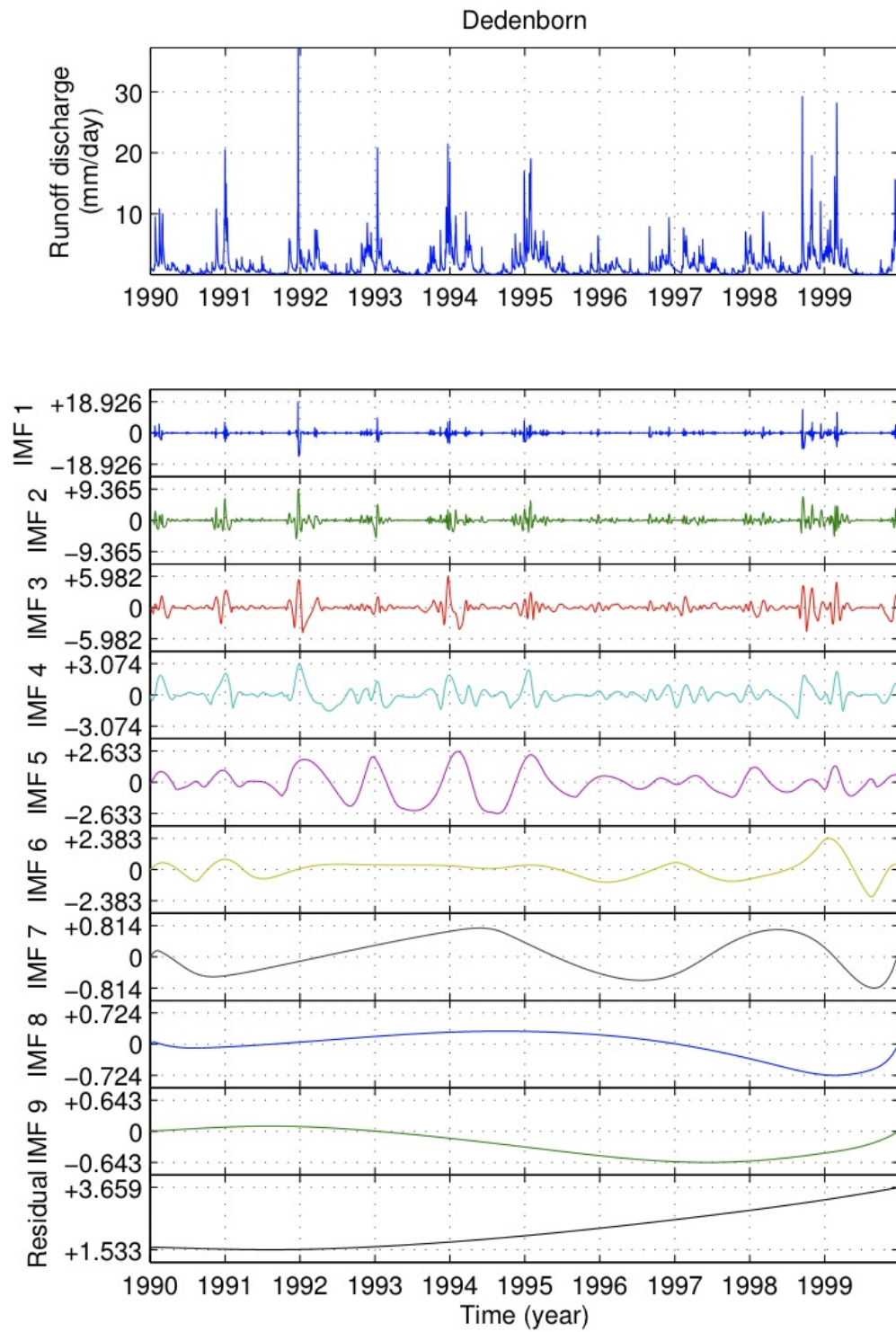


Abbildung 3.13: Abfluss von Dedenborn von 1990 bis 1999 (oben) und EMD (unten)

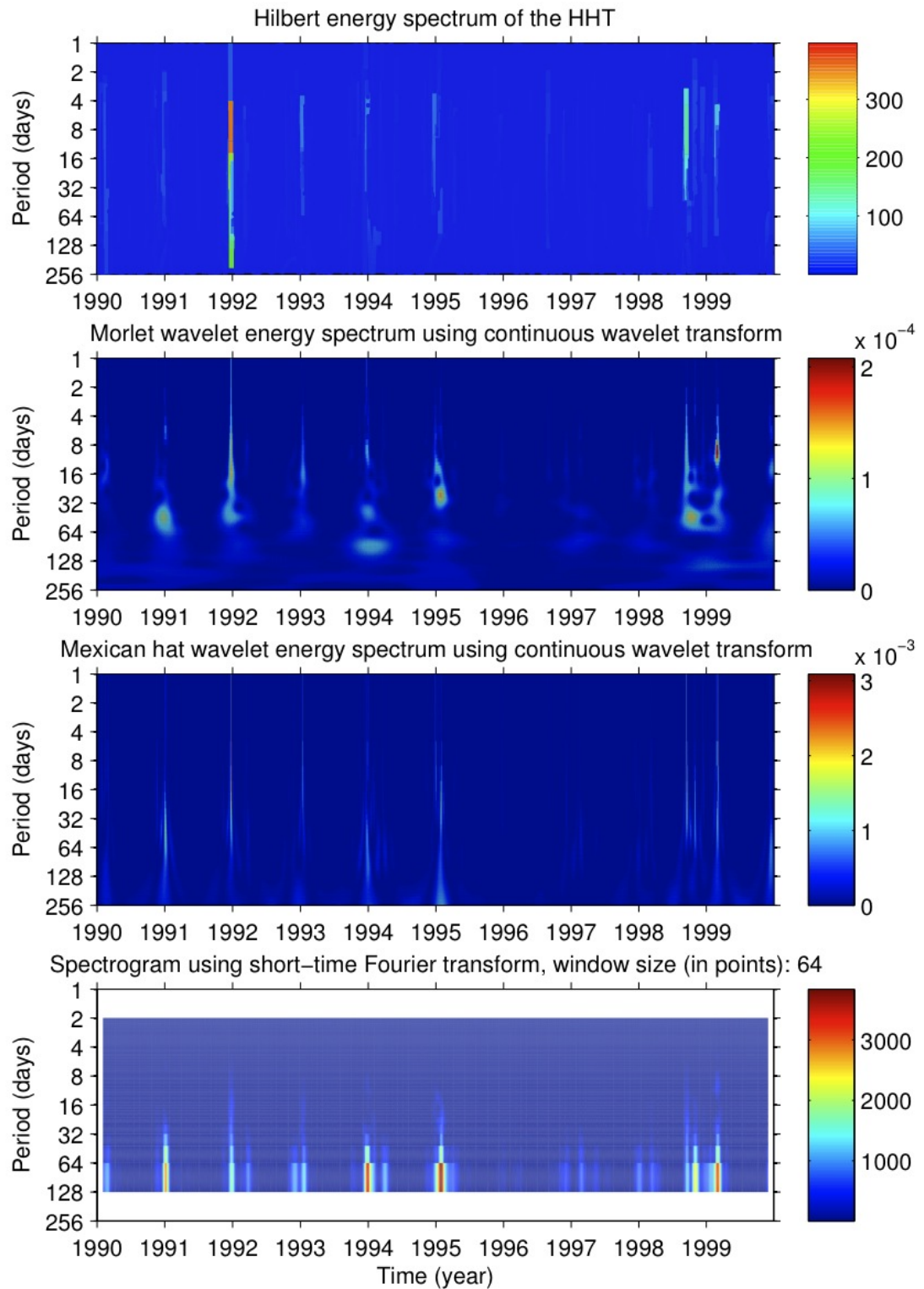


Abbildung 3.14: Dedenborn 1990–1999: Hilbert-Energie-Spektrum (oben), Morlet und Mexican-Hat Wavelet-Energie-Spektrum (mitte) und Spektrogramm der Short-Time-Fourier-Transformation (unten)

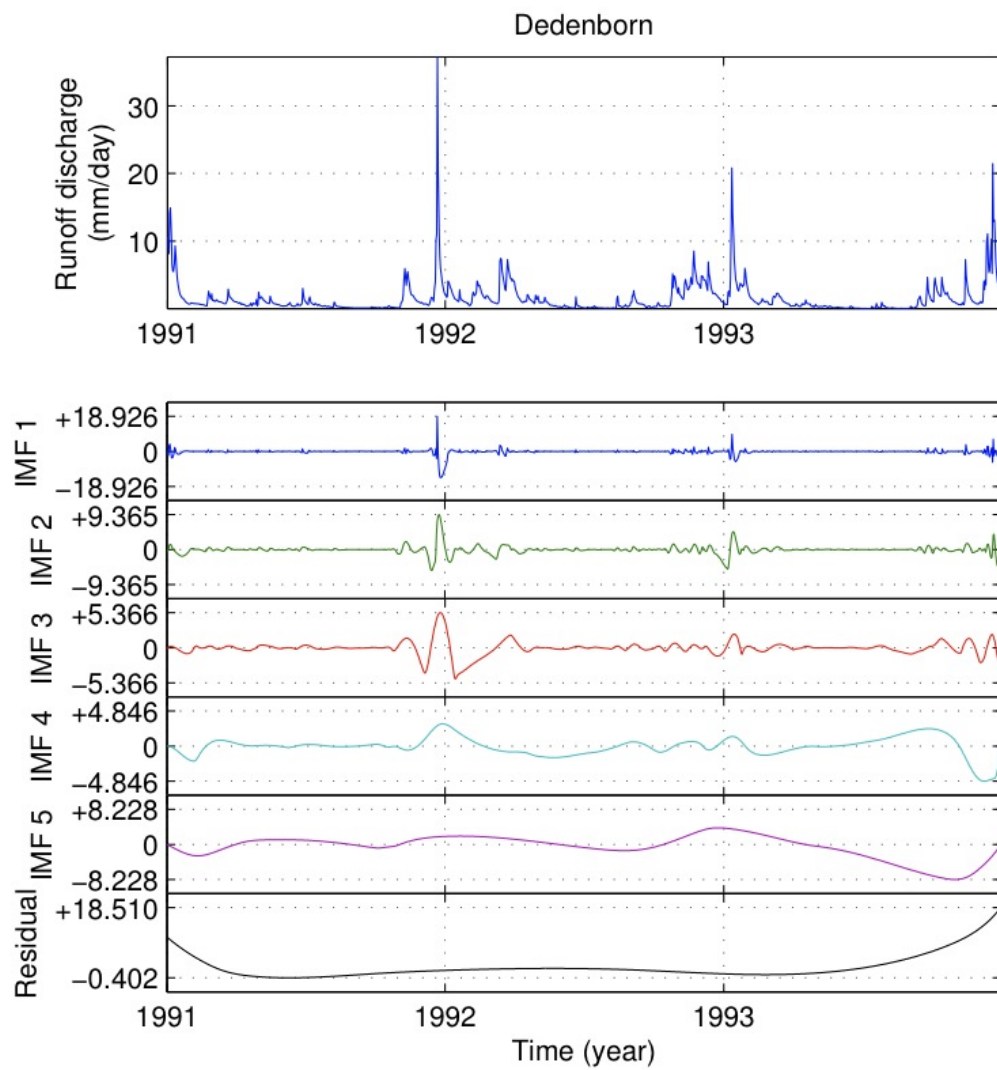


Abbildung 3.15: Abfluss von Dedenborn von 1991 bis 1993 (oben) und EMD (unten)

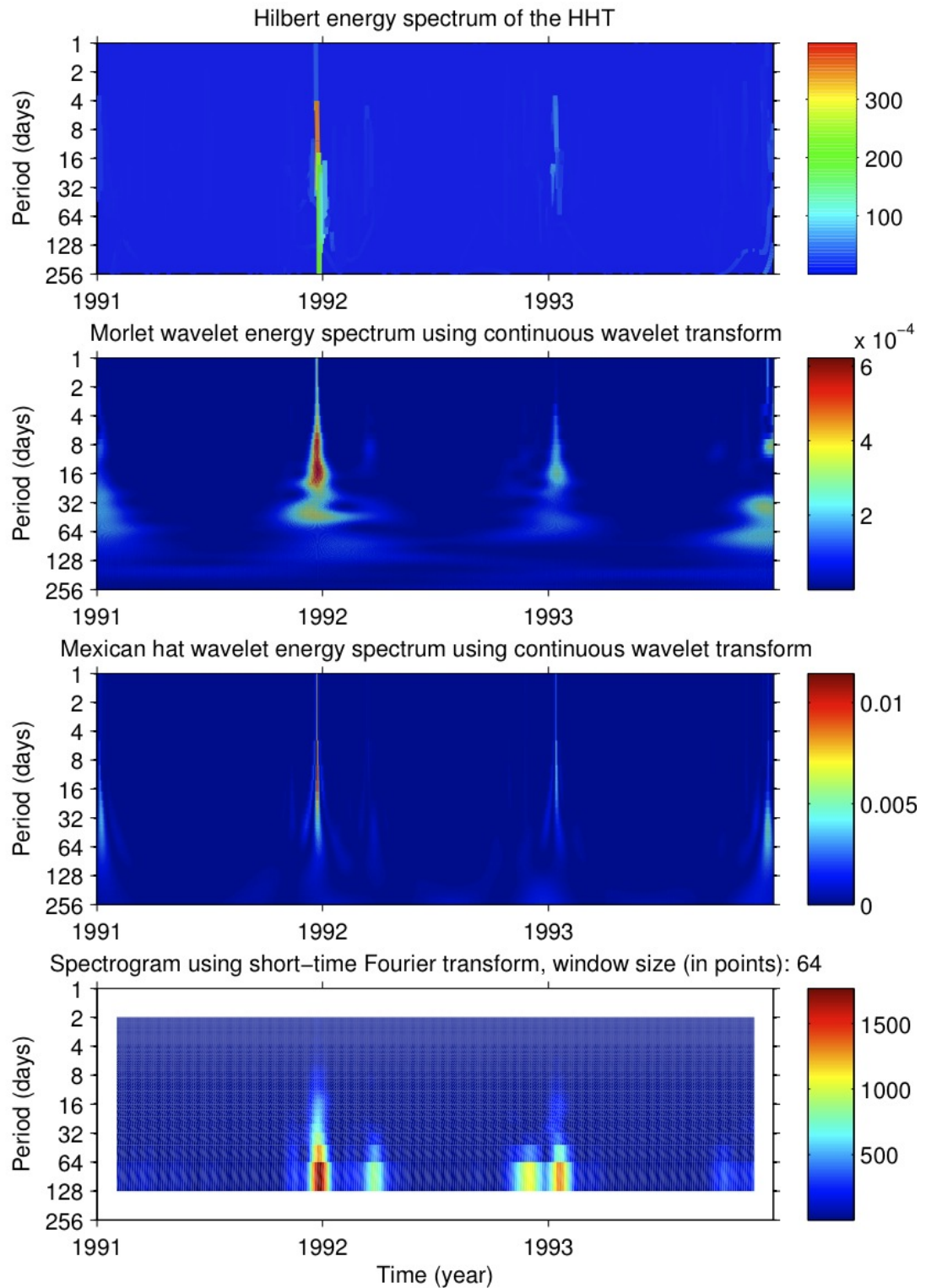


Abbildung 3.16: Dedenborn 1991–1993: Hilbert-Energie-Spektrum (oben), Morlet und Mexican-Hat Wavelet-Energie-Spektrum (mitte) und Spektrogramm der Short-Time-Fourier-Transformation (unten)

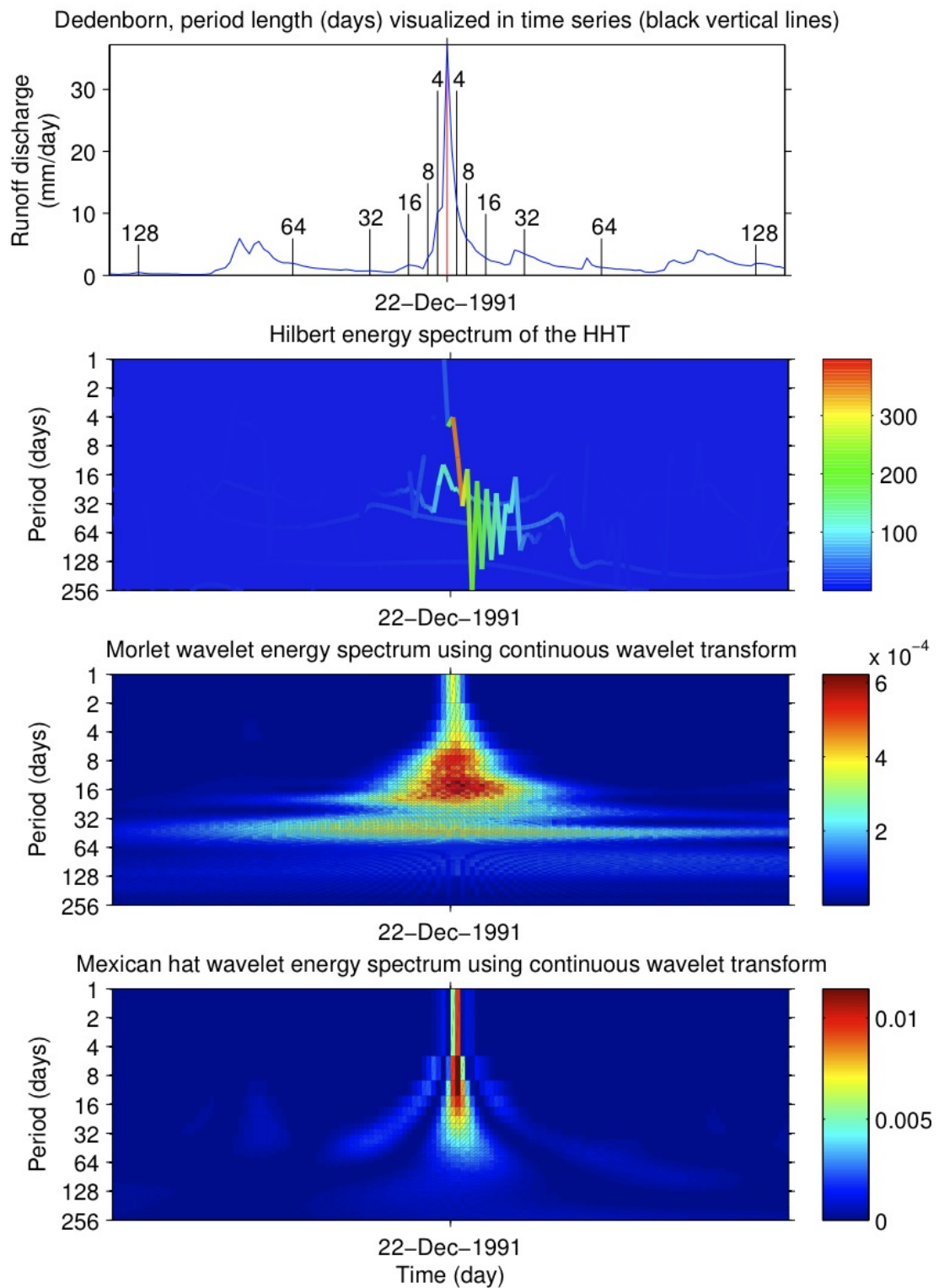


Abbildung 3.17: Dedenborn um 1991-12-22: Signal mit Visualisierung der Periodenlänge, Hilbert-Energie-Spektrum, Morlet und Mexican-Hat Wavelet-Energie-Spektrum (von oben nach unten)

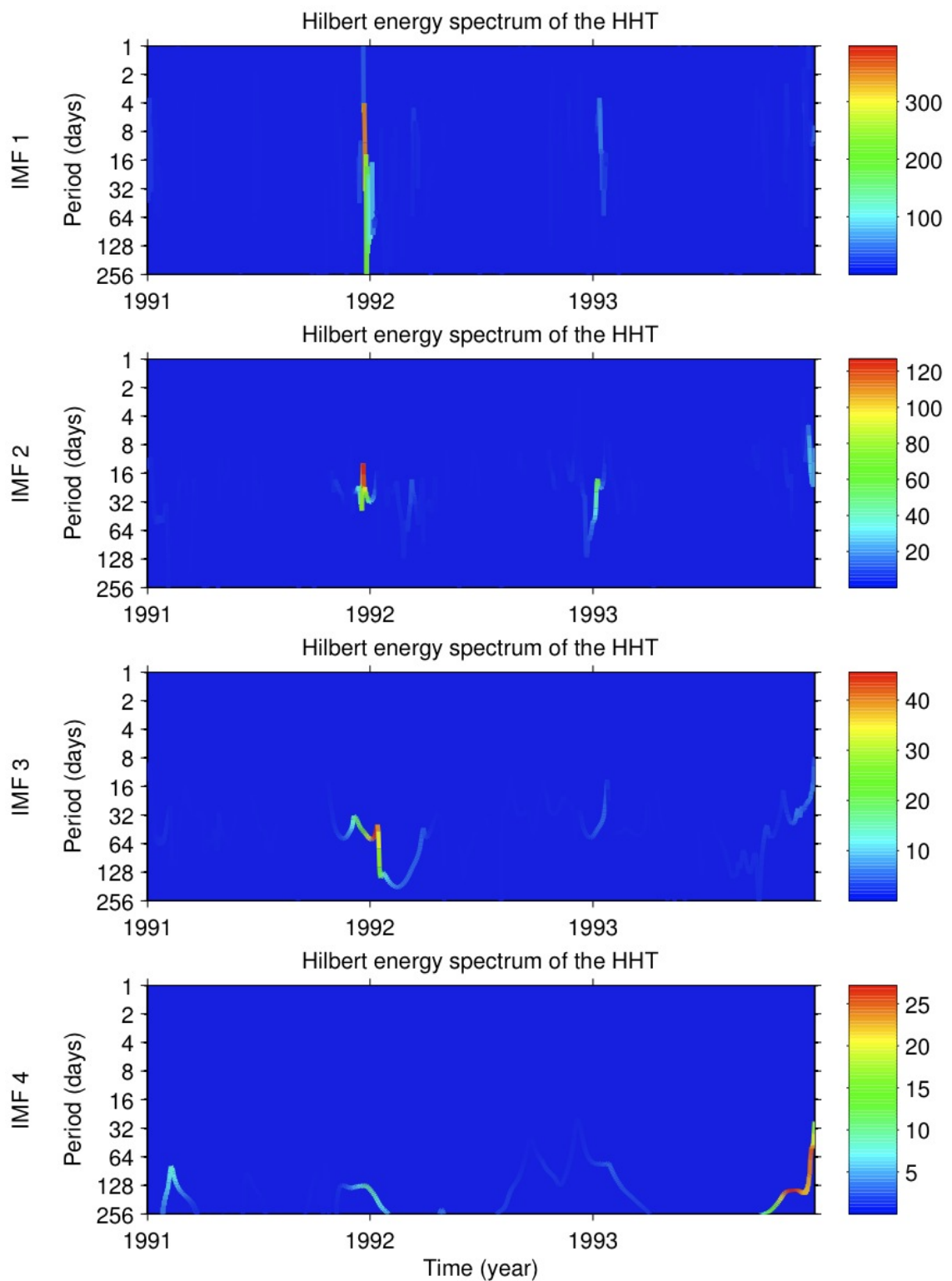
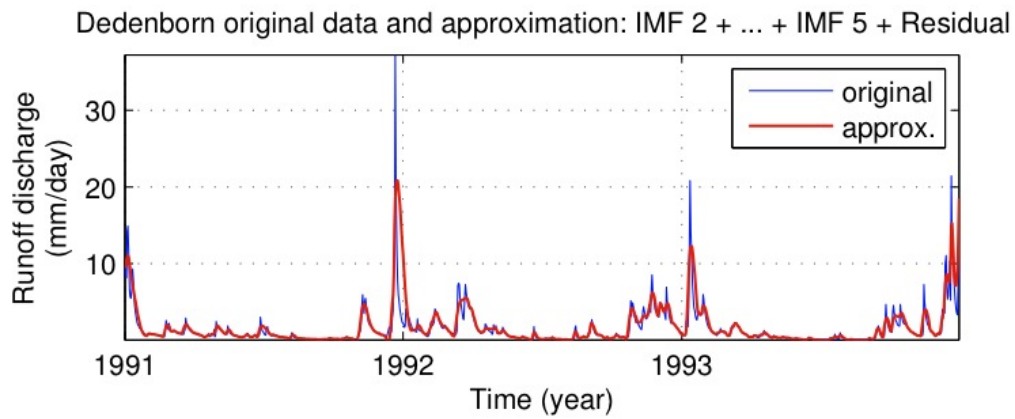
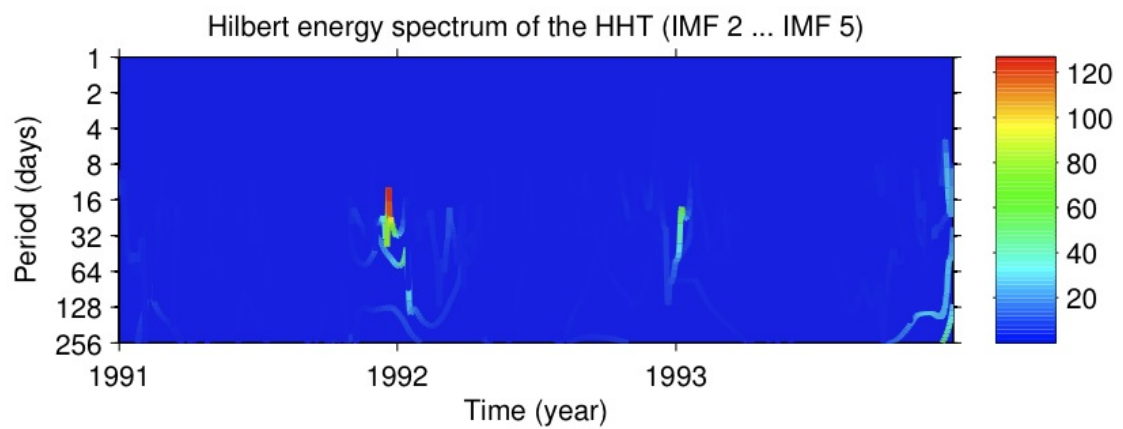


Abbildung 3.18: Dedenborn 1991–1993: Hilbert-Energie-Spektrum separat für IMF 1 bis IMF 4



(a) Dedenborn 1991–1993: Approximation ohne der ersten IMF



(b) Dedenborn 1991–1993: Hilbert-Energie-Spektrum ohne der ersten IMF

Abbildung 3.19: Dedenborn 1991–1993: Approximation des Signals und Hilbert-Energie-Spektrum ohne der ersten IMF

sind bei allen Messstationen vorhanden. Bei Rollesbroich fällt auf, dass bei diesem Datensatz die Ereignisse häufiger innerhalb eines Winters auftreten als bei den anderen Messstationen. Dort finden also häufiger kurze und starke Abflüsse statt, und es kommen auch kürzere Perioden von bis zu zwei Tagen vor, während die anderen Messstationen nur Perioden von bis zu vier Tagen erreichen. Die Verteilung der Energie befindet sich bei allen Messstationen überwiegend in einem Frequenzband zwischen Perioden von 4 bis 64 Tagen, es sind aber Unterschiede bei der Höhe der Energiewerte auszumachen. Die Energiewerte von Dedenborn und Rollesbroich unterscheiden sich nur marginal, die bei Erkersruhr sind dagegen deutlich geringer. Der Grund für diese Abflusscharakteristik Erkersruhrs könnte in dem gegenüber den beiden anderen Messstationen wesentlich höheren Waldanteil in der Umgebung von Erkersruhr liegen. Der Waldanteil von Dedenborn ist gegenüber Erkersruhr um ca. 60 % und von Rollesbroich um ca. 47 % geringer (siehe Tabelle 3.1).

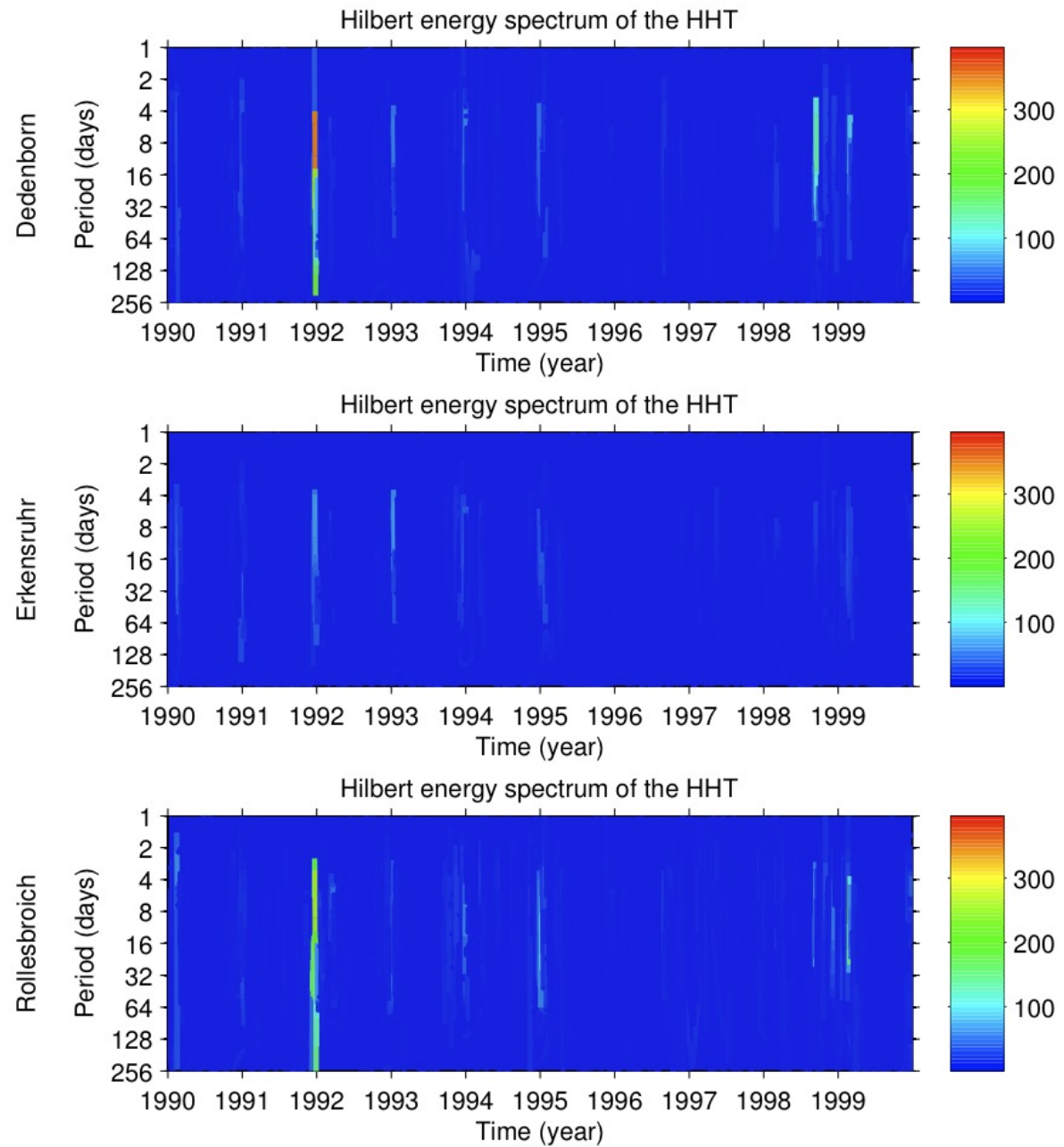


Abbildung 3.20: Vergleich der Hilbert-Energie-Spektren von Dedenborn (oben), Erkensruhr (mitte) und Rollesbroich (unten) für den Zeitraum 1990–1999

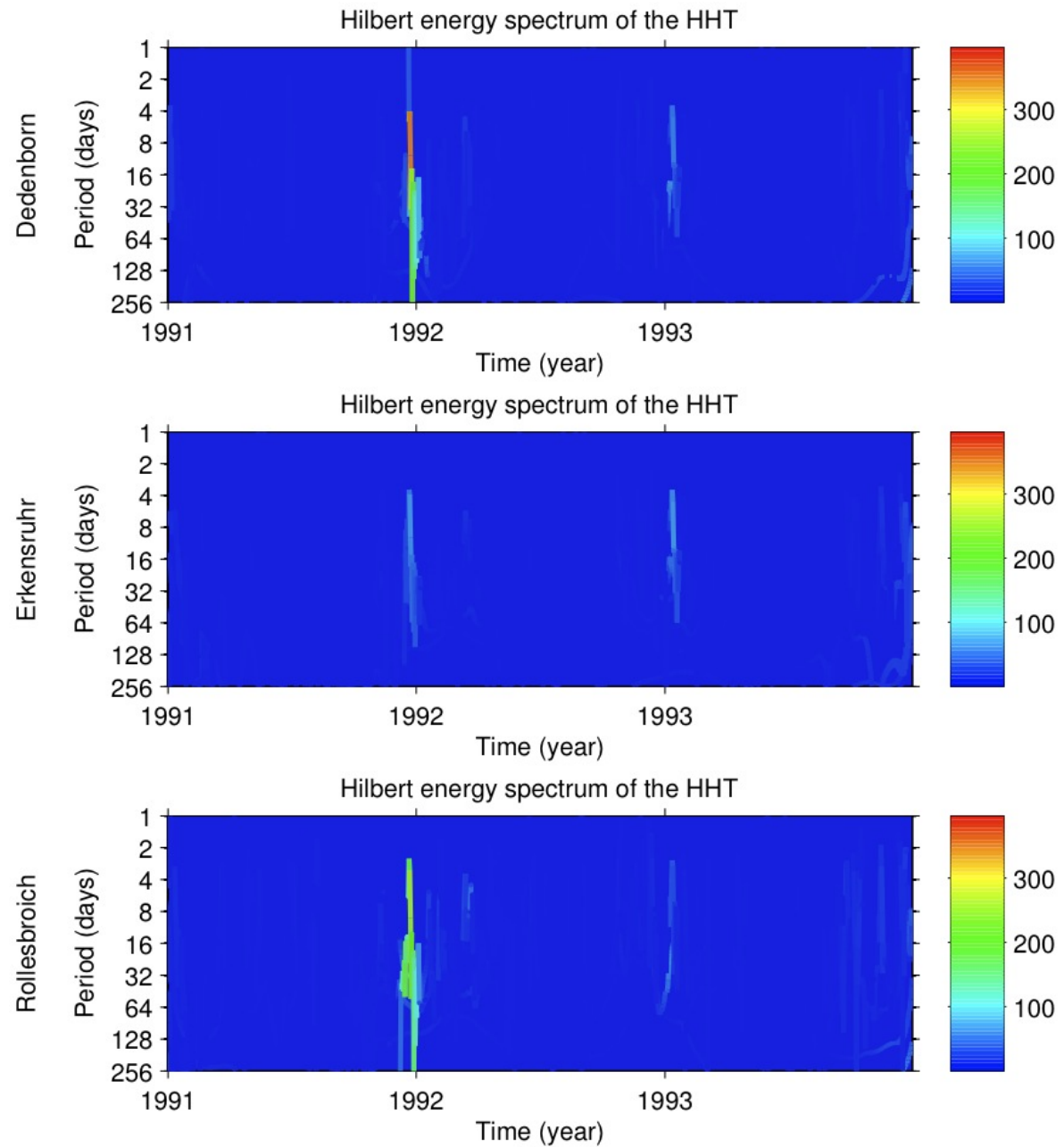


Abbildung 3.21: Vergleich der Hilbert-Energie-Spektren von Dedenborn (oben), Erkensruhr (mitte) und Rollesbroich (unten) für den Zeitraum 1991–1993

3.6 Probleme und offene Fragen

Bereits an einigen Stellen in diesem Kapitel wurden Problematiken bei der Hilbert-Huang-Transformation angesprochen. In diesem Abschnitt werden sie ausführlich behandelt.

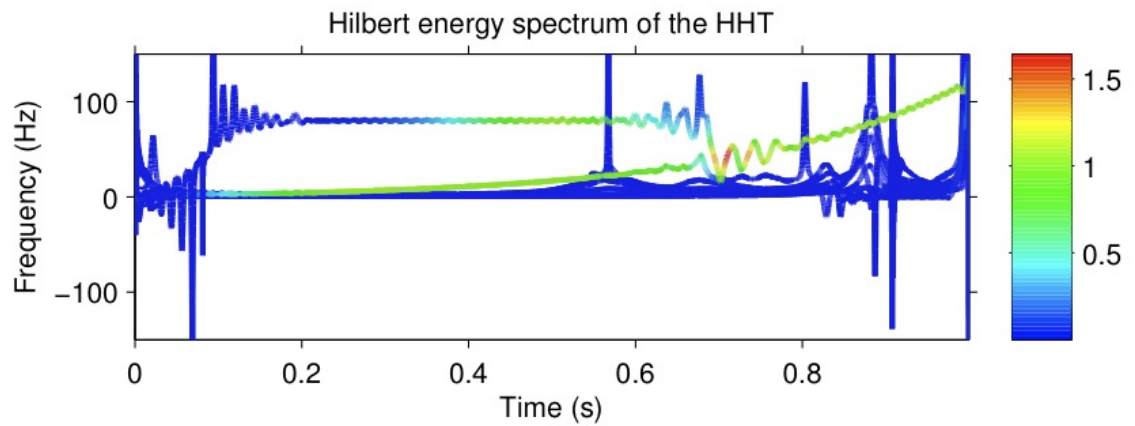
Die Definition 3.1.1 der Intrinsic Mode Function wurde von Huang et al. in [HSL⁺98] mit dem Ziel formuliert, eine möglichst gute Approximation an Monokomponentensignale zu bekommen. Bei Monokomponentensignalen (siehe Definition 2.8.1) ist ein kritischer und für die physikalische Plausibilität entscheidender Punkt, dass das Vorzeichen der instantanen Frequenz eines Monokomponentensignals nichtnegativ ist. Eine erste theoretische Untersuchung von IMFs und von den Vorzeichen ihrer instantanen Frequenzen wurde von Sharpley und Vatchev in [SV06] durchgeführt. Sie formulieren die Definition einer *weak-IMF*, die der Definition 3.1.1 der Intrinsic Mode Function ohne der Bedingung (ii) entspricht. Also heißt eine Funktion weak-IMF, falls die Anzahl ihrer Extremstellen und die Anzahl ihrer Nullstellen sich höchstens um eins unterscheiden. Sie erreichen eine Charakterisierung der weak-IMFs als Lösungen f von selbstadjungierten gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{d}{dt} f(t) \right) + q(t) f(t) = 0, \quad t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

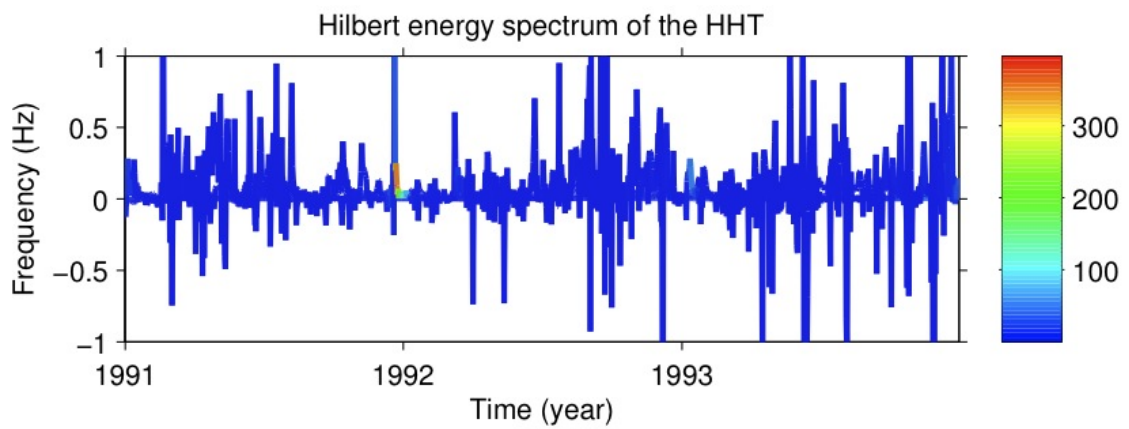
mit $q \in C(I)$, $p \in C^1(I)$ und $p(t) > 0$ für alle $t \in I$. Des Weiteren konstruieren sie Funktionen, die alle Anforderungen an eine IMF erfüllen und somit implizit auch weak-IMFs darstellen, aber trotzdem negative instantane Frequenzen aufweisen. Sie finden also Funktionen, für dessen instantane Frequenzen φ' ein t mit $\varphi'(t) < 0$ existiert. Die sich durch diese Erkenntnis aufwerfende Frage, wie oder ob die Definition der IMF so modifiziert werden kann, dass ein Nachweis von nichtnegativen instantanen Frequenzen für alle IMFs erbracht werden kann, ist bis heute offen.

Das Auftreten negativer instantaner Frequenzen ist auch an den Signalen des Beispiels 3.4.3 und an den hydrologischen Zeitreihen aus Abschnitt 3.5 zu beobachten. Dazu wird in Abbildung 3.22 die vertikale Achse des Hilbert-Energie-Spektrums angepasst und eine weiße Hintergrundfarbe gesetzt. Im Hilbert-Energie-Spektrum des synthetischen Signals aus dem Beispiel 3.4.3 (iii), dargestellt in Abbildung 3.22 (a), sind bereits negative Frequenzen deutlich zu erkennen. Noch gravierender fällt das Auftreten negativer instantaner Frequenzen bei den realen Messdaten des Abflusses von Dedenborn in Abbildung 3.22 (b) aus.

Zur Empirical Mode Decomposition ist zunächst festzuhalten, dass die Zerlegung eines Signals in eine Summe von IMFs und ein Residuum, wie in Gleichung (3.2.1), nicht eindeutig bestimmt ist und es unendlich viele mögliche Zerlegungen gibt (vgl. [SV06], S. 18). Dass eine solche Zerlegung existiert, wird bereits mit der Existenz der Fourier-Reihe (siehe Gleichung (3.4.2)) belegt. Die Fourier-Reihe bildet die einfachste Zerlegung der Form (3.2.1) mit konstanten Amplituden und konstanten Frequenzen. Der empirische Algorithmus der EMD und die Definition der IMFs über Extremstellen, Nullstellen und Mittelwertfunktionen machen eine theoretische Herangehensweise sowie das Aufstellen und das Beweisen von



(a) Hilbert-Energie-Spektrum des Beispiels 3.4.3 (iii)



(b) Hilbert-Energie-Spektrum des Abflusses von Dedenborn, 1991–1993

Abbildung 3.22: Negative instantane Frequenzen im Hilbert-Energie-Spektrum

mathematischen Behauptungen sehr schwer. Daher existiert für keine der beiden ineinander verschachtelten Iterationen im EMD-Algorithmus ein Konvergenzbeweis. Es fehlt sogar eine Konvergenztheorie, die Aussagen formuliert, die für die Konvergenz zu zeigen wären. Nach einem Beweis der Konvergenz würde sich außerdem immer noch die Frage der Eindeutigkeit stellen, also gegen welches der unendlich vielen möglichen additiven Zerlegungen der Form (3.2.1) das Ergebnis des EMD-Algorithmus strebt.

Ein kritischer Punkt, der die resultierende Zerlegung der EMD entscheidend beeinflusst, ist die Wahl der Abbruchkriterien für die jeweiligen Iterationen. Die Schranke für das Standardabweichungskriterium der inneren Iteration wird wie im Algorithmus 3.3.4 mit ϵ bezeichnet, und bei der äußeren Iteration ist n_r die Anzahl der Extremstellen, die das Residuum höchstens haben darf. Beide Schwellenwerte ϵ und n_r haben einen Einfluss darauf, wie viele IMF-Komponenten die EMD erzeugt, wobei niedrigere Schwellenwerte die Anzahl der IMF-Komponenten ansteigen lassen. Untersuchungen von Huang et al. ([HWL⁺03], S. 2320 ff.) zufolge bewirkt ein kleineres ϵ eine bessere Symmetrie der IMFs bezüglich der horizontalen Achse, jedoch nimmt gleichzeitig die Variation der Amplituden bei den IMFs ab. Beide Effekte, der Anstieg der IMF-Komponentenanzahl und die Verringerung der Variation in der Amplitude, lassen sich bereits an einfachen Signalen, wie denen aus Beispiel 3.3.5, beobachten. In Tabelle 3.2 sind unterschiedliche Eingabeparameter und ihre Auswirkungen auf die Anzahl der IMFs und die Anzahl der Iterationen, bis eine IMF gewonnen wurde, für zwei Signale aufgelistet. Das erste Signal ist das synthetische Signal des Beispiels 3.3.5 (i) und das zweite Signal ist eine hydrologische Zeitreihe aus Abschnitt 3.5, die Messwerte des Abflusses von Dedenborn für den Zeitraum von 1991 bis 1993 darstellt. Bei Verkleinern des Abbruchkriteriums für die Standardabweichung ϵ steigt die Anzahl der Iterationen, bis eine IMF gewonnen wurde, an, aber auch die Anzahl der IMF-Komponenten nimmt deutlich zu. Die Zunahme von IMF-Komponenten widerspricht jedoch einem konvergenten Verhalten, oder die Zerlegung, gegen die die EMD konvergiert, entspricht nicht der gewünschten physikalisch sinnvollen Zerlegung in eine Summe mit möglichst wenigen Komponenten. Die Verringerung des Schwellenwerts für die Anzahl der Extremstellen n_r , die das Residuum maximal besitzen darf, kann ab einem gewissen Wert dazu führen, dass die äußere Iteration des EMD-Algorithmus nicht mehr abbricht. Das ist in Tabelle 3.2 bei $n_r = 2$ für das Beispielsignal 3.3.5 (i) zu sehen. Das kann durch Randeffekte, die beim Bilden der Mittelwertfunktionen aufgrund der kubischen Spline-Interpolation entstehen, verursacht worden sein. Abschließend bleibt festzuhalten, dass die Wahl der Abbruchparameter ϵ und n_r vom zu analysierenden Signal abhängig ist und passende Werte für ϵ und n_r in der Praxis durch Experimente herausgefunden werden müssen. Außerdem ist die physikalische Bedeutung der letzten und langsam oszillierenden IMF-Komponenten anzuzweifeln, da sie durch eine zu restriktive Wahl der Abbruchparameter erzeugt worden sein können.

Bei der EMD können Randeffekte, wie in der Bemerkung 3.2.1 erläutert, auftreten. Randeffekte treten sowohl bei der Berechnung von Mittelwertfunktionen mittels Einhüllenden wie auch bei der Berechnung mittels des Funktional (3.3.1) auf und konnten im Beispiel 3.3.5 (iii)

Tabelle 3.2: Unterschiedliche Eingabeparameter für die EMD und die benötigte Anzahl der Iterationen, um eine IMF zu erhalten

Signal	Beispiel 3.3.5 (i)						Abfluss von Dedenborn 1991–1993			
ϵ	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.01	0.01	0.1	0.01	0.001	0.0001
n_r	4	4	4	4	3	2	5	5	5	5
IMF 1	2	2	3	5	2	2	2	5	25	46
IMF 2	1	2	4	7	2	2	2	4	11	30
IMF 3	3	4	16	22	4	4	2	5	11	34
IMF 4	3		25	48		9	3	4	11	32
IMF 5			32	92		11	4	10	16	36
IMF 6			27	38		16	3	12	17	32
IMF 7			27	32		11		15	16	43
IMF 8			29	69		10		8	27	50
IMF 9			31	51		8		10	26	58
IMF 10				80		10		8	27	51
IMF 11				24		8			20	55
IMF 12				77		10			24	72
IMF 13				28		8			28	62
IMF 14				14		10			32	62
IMF 15				62		8			25	74
IMF 16				63		11			23	71
IMF 17				58		9			37	69
IMF 18				86		15				49
IMF 19				58		16				58
IMF 20				49		17				49
				⋮		⋮				⋮

gut beobachtet werden. Eine Möglichkeit, das Randeffektproblem zu beheben, besteht darin, die IMFs auf einem kleineren Intervall zu betrachten und somit die Randeffekte auszublenken. Huang et al. schlagen darüber hinaus in [HSL⁺98], S. 989 f. vor, das Signal außerhalb der Ränder zu extrapolieren und darauf dann die EMD anzuwenden. Im Allgemeinen gilt Extrapolation allerdings als ein unsicheres und instabiles Verfahren und ihre Ergebnisse sind bei nichtlinearen und nichtstationären Signalen daher fragwürdig.

Mit Ausnahme der ersten IMF sind alle IMFs Splines, wie in [Hua05], S. 21 f. gezeigt wird. Die IMFs sind Splines vom selben Typ, der für die Bildung der Mittelwertfunktionen gewählt wurde. Aus diesem Grund ist die Wahl der Splines entscheidend für die Zerlegung der EMD. Doch theoretische Aussagen über die Vorteile eines Splines gegenüber eines anderen in Bezug auf die EMD konnten bisher nicht gewonnen werden. In Implementierungen des EMD-Algorithmus werden für die Bildung der Mittelwertfunktionen meistens kubische B-Splines verwendet. Die Interpolation mit B-Splines bietet den Vorteil eines effizienten und stabilen rekursiven Interpolationsalgorithmus und kubische B-Splines haben zusätzlich die Eigenschaft, die Biegeenergie zu minimieren (siehe [SK04], S. 106).

Die Komplexität der Extremstellenberechnung erhöht sich stark, falls die EMD für multivariate Signale verallgemeinert werden soll. Die Schwierigkeit bei multivariaten Signalen besteht darüber hinaus darin, auf der einen Seite eine genügend glatte Mittelwertfunktion zu finden, die andererseits die Variationen im Signal gut genug abbildet. Mit unterschiedlichen EMD-Methoden für multivariate Signale hat sich Koch in seiner Diplomarbeit [Koc08] beschäftigt. Das Hauptresultat seiner Diplomarbeit ist auch in [JKKP10] zu finden. Außerdem zeigt er eine mögliche Verallgemeinerung der instantanen Frequenz für multivariate Signale auf. Zur Verallgemeinerung der instantanen Frequenz werden das Kalkül der Clifford-Algebra und Quaternionen benutzt und mit Hilfe der Riesz-Transformation wird das monogene Signal definiert. Das monogene Signal stellt die Verallgemeinerung des analytischen Signals und die Riesz-Transformation die Verallgemeinerung der Hilbert-Transformation dar. Für weitere Informationen zum monogenen Signal wird auf [FS01] und [FS00] verwiesen.

Kapitel 4

Weitere Entwicklungen zur Hilbert-Huang-Transformation und Alternativen

4.1 Lokale Mittelwertfunktionen als Lösungen gekoppelter PDEs

In der Arbeit [DLN05] von Deléchéle et al. werden die folgenden Probleme bei der Bildung der oberen und unteren Einhüllenden mittels Splines im EMD-Algorithmus hervorgehoben: die Probleme am Rand; die Schwingungen am Rand, die sich ins Innere des Intervalls fortpflanzen können (siehe Abschnitt 3.6); das Entstehen sogenannter „overshoots“ und „undershoots“, d. h. die Einhüllende schwingt weit über bzw. unter das Signal hinaus. Der von Deléchéle et al. vorgestellte alternative Ansatz zur Gewinnung von lokalen Mittelwertfunktionen benutzt die parabolische PDE vierter Ordnung

$$s_t = -f(x)s_{xxxx} \quad (4.1.1)$$

mit $s \equiv s(t, x)$, wobei der Ausdruck s_{xxxx} für die vierte partielle Ableitung nach x steht. Mit den Notationen $s_0(x) = s(t, x)|_{t=0}$ für die Anfangsbedingung und $s_\infty(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t, x)$ für die asymptotische Lösung von (4.1.1) kann das gekoppelte System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{cases} s_t^+ = -f^+((s_0)_x, (s_0)_{xx}) s_{xxxx}^+ \\ s_t^- = -f^-((s_0)_x, (s_0)_{xx}) s_{xxxx}^- \end{cases} \quad (4.1.2)$$

formuliert werden. Die asymptotischen Lösungen $s_\infty^+(x)$ und $s_\infty^-(x)$ repräsentieren im Falle der Konvergenz die obere und die untere Einhüllende des Signals $s_0(x)$, und die lokale Mittelwertfunktion $s_\infty(x)$ kann dann als

$$s_\infty(x) = \frac{s_\infty^+(x) + s_\infty^-(x)}{2}$$

berechnet werden. Für die Funktionen f^+ und f^- soll $f^\pm(x) \geq 0$ für alle x gelten. Sie könnten beispielsweise als

$$f^\pm((s_0)_x, (s_0)_{xx}) = \frac{1}{3} \left(|\operatorname{sgn}((s_0)_x)| \pm \operatorname{sgn}((s_0)_{xx}) + 1 \right)$$

gewählt werden. Sie hätten dann die Eigenschaft, dass $f^+(x) = 0$ für alle Stellen x , an denen $s_0(x)$ sein Maximum besitzt, und $f^-(x) = 0$ für alle Stellen x , an denen $s_0(x)$ sein Minimum besitzt, gilt. Die Funktionen f^+ bzw. f^- sind dann zwischen zwei aufeinander folgenden Minima bzw. Maxima ungleich null. Bei Konvergenz für $t \rightarrow \infty$ sind die resultierenden Signale s_∞^+ bzw. s_∞^- stückweise kubische Polynome, die die Maxima bzw. die Minima des Signals s_0 interpolieren.

Zur numerischen Lösung des gekoppelten Systems partieller Differentialgleichungen (4.1.2) haben Deléchelle et al. sowohl ein explizites als auch ein implizites Crank-Nicholson-Verfahren mit Neumann-Randbedingung verwendet (siehe [DLN05], S. 766). Die neue Methode zur Bildung von lokalen Mittelwertfunktionen wurde auf drei synthetische Signale angewandt und konnte für diese Beispielsignale ähnlich gute Ergebnisse liefern wie die klassische EMD.

4.2 Anwendung der Empirical Mode Decomposition auf ein Rauschen

Die Empirical Mode Decomposition von Signalen, die ausschließlich aus weißem Rauschen oder fraktalem Gauß'schen Rauschen bestehen, wurde von Flandrin et al. in [FRG04] und [FG04] sowie von Wu und Huang in [WH04] untersucht. Fraktales Gauß'sches Rauschen ist eine Verallgemeinerung vom weißen Rauschen. Es ist ein vielseitiges Modell für ein Rauschen mit weitem Frequenzspektrum, das nicht von einzelnen Frequenzbändern dominiert wird.

Definition 4.2.1. *Fraktales Gauß'sches Rauschen*, das als FGN für den englischen Begriff „fractional Gaussian noise“ abgekürzt wird, ist als der Zuwachsprozess der fraktalen Brownschen Bewegung definiert. Das fraktale Gauß'sche Rauschen ist ein stationärer stochastischer Prozess $(X_t^H)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit dem Hurst-Index oder Hurst-Exponenten $H \in [0, 1]$, dessen Kovarianzfunktion γ durch die Gleichung

$$\gamma(\tau) = \frac{\sigma^2}{2} (|\tau - 1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau + 1|^{2H}), \quad \tau \in \mathbb{Z},$$

gegeben ist.

Für den Spezialfall $H = 1/2$ wird das fraktale Gauß'sche Rauschen zu einfachem weißem Rauschen mit der Korrelation null. Im umgekehrten Fall $H \neq 1/2$ erhält man eine nichtverschwindende Korrelation, die negativ für $H < 1/2$ und positiv für $H > 1/2$ ist.

Die EMD wurde in [FRG04] und [FG04] auf ein fraktales Gauß'sches Rauschen und in [WH04] auf ein weißes Rauschen angewandt und für die resultierenden IMFs wurde das Fourier-Spektrum berechnet. Nach zahlreichen Wiederholungen dieser Prozedur mit unterschiedlichen Realisierungen des Rauschens und anschließender Mittelwertbildung der Fourier-Spektren der IMFs kamen beide Arbeiten zu dem Ergebnis, dass sich die EMD wie eine Filterbank verhält, die ähnlich zu der Filterbankeigenschaft einer Wavelet-Zerlegung ist. Eine Filterbank

ist eine Ansammlung von Bandpassfiltern, die jeweils eine feste Bandpassform haben (z. B. die Form einer Gauß-Verteilung) und die zusammen einen weiten Frequenzbereich abdecken.

Weiterhin wurde die Durchschnittsfrequenz aufeinanderfolgender IMFs empirisch untersucht, indem die Anzahl der Nullstellen miteinander verglichen wurden. Schließlich ist jede IMF nach Konstruktion eine Wellenfunktion mit verschwindender lokaler Mittelwertfunktion, deren Extremstellenanzahl sich von der Nullstellenanzahl höchstens um eins unterscheidet. Es wurde festgestellt, dass sich die EMD wie eine dyadische Filterbank verhält, d. h. die Durchschnittsfrequenzen aufeinanderfolgender IMFs verdoppeln sich.

4.3 Mode-Mixing-Problem

Ein Mode-Mixing-Problem liegt vor, falls in einer IMF sehr unterschiedliche Frequenzen enthalten sind. In einem solchen Fall kann angenommen werden, dass mehrere unterschiedliche physikalische Moden des analysierten Signals in einer IMF enthalten sind und dass die Zerlegung der EMD physikalisch nicht sinnvoll ist. Außerdem kann ein physikalischer Mode dann häufig auf mehrere IMFs aufgeteilt sein, d. h. dessen Schwingungen tauchen auf unterschiedlichen Intervallen in unterschiedlichen IMFs auf. Das führt zu unerwünschten Stufeneffekten in den Frequenzen der IMFs. Wenn man bedenkt, dass die meisten realen Messdaten mit Ungenauigkeiten behaftet sind, also ein wie auch immer geartetes Rauschen über dem genauen Signal liegt, dann kann aus dem Mode-Mixing-Problem eine Instabilität der EMD gegenüber Rauschen gefolgert werden. Der Grund dafür liegt darin, dass der EMD-Algorithmus unterschiedliche vom Rauschen abhängige Zerlegungen liefert und physikalische Moden vom Rauschen beeinflusst in unterschiedlichen IMFs auftauchen.

Als eine Behebung des Problems wurde von Huang et al. in [HSL99] vorgeschlagen, einen Periodizitätstest bei der Bestimmung der IMFs im EMD-Algorithmus einzuführen. Der Test besteht in der Überprüfung, wie stark die Frequenzen in einer IMF voneinander abweichen und es wird eine maximale erlaubte Toleranz für die Abweichung vom Benutzer festgeschrieben. Dieses Verfahren führt bei einfachen Signalen zum Erfolg, aber bei Signalen mit komplexen Strukturen kann eine sinnvolle Toleranz nur schwer festgelegt werden. Außerdem geht die Festlegung einer Toleranz zu Lasten der Adaptivität der EMD und auch zu Lasten der Eindeutigkeit der Zerlegung durch die EMD. Ein besserer Ansatz zum Umgang mit Mode-Mixing wurde von Wu und Huang in [WH09] vorgestellt, der im Abschnitt 4.4 näher erläutert wird.

4.4 Ensemble Empirical Mode Decomposition

Die Ensemble Empirical Mode Decomposition (EEMD) ist ein erweiterter EMD-Algorithmus, der dem zu analysierenden Signal ein weißes Rauschen additiv hinzufügt, um das im

Abschnitt 4.3 beschriebene Mode-Mixing-Problem zu vermeiden und die EMD stabiler gegenüber mit Rauschen behafteten Signalen zu machen. Sie wurde erstmals von Wu und Huang in [WH09] vorgestellt.

Das Hinzufügen von einem weißen Rauschen $w_i(t)$ zum Signal $s(t)$

$$\tilde{s}_i(t) = s(t) + w_i(t)$$

verleiht $\tilde{s}_i(t)$ eine gleichmäßige Verteilung von Referenzfrequenzen und die empirisch nachgewiesene dyadische Filterbankeigenschaft der EMD (siehe Abschnitt 4.2) sorgt dafür, dass unterschiedliche Moden des Signals $s(t)$ zusammen mit dem Rauschen $w_i(t)$ auf unterschiedliche IMFs verteilt werden. Um das Rauschen wieder aus den IMFs entfernen zu können, wird eine Mittelwertbildung mehrerer Durchläufe der EMD mit neuen Realisierungen eines Rauschens $w_i(t)$ vorgenommen. Also bekommt man N EMD-Zerlegungen

$$\tilde{s}_i(t) = \sum_{j=1}^n g_{i,j}(t) + r_{i,n}(t), \quad i = 1, \dots, N,$$

und es wird der Mittelwert

$$g_j(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_{i,j}(t), \quad j = 1, \dots, n$$

gebildet, um die j -te IMF $g_j(t)$ der EEMD zu erhalten. Da unterschiedliche Realisierungen des Rauschens $w_i(t)$ nicht miteinander korrelieren, löschen sie sich mit zunehmendem N aus den IMFs gegenseitig aus.

Zu der Anzahl, wie oft die EMD mit verändertem Rauschen angewandt werden soll, können Wu und Huang nur empirisch gewonnene Richtwerte angeben. In ihren Versuchen hat sich eine Anzahl von $\sim 10^2$ bewährt. Damit erhöht sich aber auch gleichzeitig der Rechenaufwand der EEMD gegenüber der EMD erheblich. Ebenso kann für die Amplitude des Rauschens nur eine aus Versuchen gewonnene Empfehlung ausgesprochen werden. Die Standardabweichung der Amplitude sollte laut Wu und Huang ca. das 0.2-fache der Standardabweichung des Signals betragen.

4.5 Trennung von Frequenzen beim Zwei-Ton-Signal

Rilling und Flandrin untersuchen in ihrer Arbeit [RF08], wie die EMD Signale, die aus der Superposition zweier harmonischer trigonometrischer Oszillationen mit konstanten Frequenzen und Amplituden bestehen, zerlegt, wenn das Verhältnis der beiden Frequenzen zueinander und das Verhältnis der beiden Amplituden zueinander verändert wird. Ein solches Signal s kann in die beiden mathematisch äquivalenten Darstellungen

$$s(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = 2 \cos(\pi(f_1 - f_2)t) \cos(\pi(f_1 + f_2)t)$$

überführt werden, wobei f_i für $i = 1, 2$ eine konstante Frequenz bezeichnet. Falls die Frequenzen f_1 und f_2 nahe beieinander liegen, also falls $f_1 \approx f_2$ gilt, dann erhält man das bekannte Beispiel der binauralen Beats, bei dem das menschliche Gehör nicht mehr zwei Töne, sondern einen pulsierenden Ton wahrnimmt.

Für eine Untersuchung, ob die EMD das Signal

$$s(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

in zwei IMFs aufteilt oder ob sie s durch eine amplitudenmodulierte IMF darstellt, ist es nicht notwendig, die sechs Parameter von s unabhängig voneinander zu variieren. Aus diesem Grund setzen Rilling und Flandrin $a := a_2/a_1$, $f := f_2/f_1$ und $\varphi := \varphi_2 - \varphi_1$ und betrachten das Signal

$$s(t; a, f) = \cos(2\pi t) + a \cos(2\pi f t + \varphi) \quad (4.5.1)$$

für $f \in (0, 1)$. Der erste Summand $\cos(2\pi t)$ ist die hochfrequente Komponente von $s(t; a, f)$ und der zweite Summand die niedrigfrequente Komponente von $s(t; a, f)$. Mit der Größe

$$\frac{\|g_1(t; a, f) - \cos(2\pi t)\|_{L_2(I)}}{\|a \cos(2\pi f t + \varphi)\|_{L_2(I)}} \in [0, 1], \quad (4.5.2)$$

wobei g_1 die erste IMF der EMD bezeichnet, kann nach Bilden des Durchschnittswerts über eine Reihe von Phasenverschiebungen φ dargestellt werden, für welche Werte des Tupels (a, f) die EMD die Komponenten des Zwei-Ton-Signals $s(t; a, f)$ trennt. Falls $s(t; a, f)$ aus der Gleichung (4.5.1) von der EMD getrennt wird, strebt (4.5.2) gegen null und sonst gegen eins.

Wie zu erwarten war, tauchen die beiden Komponenten in (4.5.1) ab einem gewissen Frequenzverhältnis in einer IMF auf. Das Frequenzverhältnis liegt bei $f_c \approx 0.67$. Aber auch ab einem bestimmten von f abhängigen Amplitudenverhältnis schlägt der Indikator für die Trennung der Komponenten (4.5.2) plötzlich um. Dieses Verhalten der EMD wird von Rilling und Flandrin weiter theoretisch untersucht. Es können schließlich Bereiche auf der (a, f) -Ebene angegeben werden, in denen das Signal s eindeutig getrennt wird oder nicht, und Bereiche, in denen das Ergebnis der EMD unklar ist. Die theoretischen Untersuchungen werden weiterhin auf einfache nichtlineare Signale ausgeweitet.

4.6 Normalisierte Hilbert-Transformation und direkte Quadratur

Im Abschnitt 2.8 wurde bereits aufgezeigt, dass nicht jedes Signal der Form

$$s(t) = a(t) \cos(\varphi(t))$$

die Hilbert-Transformierte

$$\mathcal{H}[s](t) = \mathcal{H}[a \cos(\varphi)](t) = a(t) \mathcal{H}[\cos(\varphi)](t) \quad (4.6.1)$$

besitzt. Damit die Gleichung (4.6.1) erfüllt ist, müssen die Bedingungen (2.8.4) und (2.8.5) des Theorems von Bedrosian (siehe [Bed63]) an die Fourier-Spektren von a und $\cos(\varphi)$ erfüllt sein. Diese Bedingungen sind wegen der Fourier-Transformation jedoch global und sind demnach für die IMFs mit ihren lokal variierenden Amplituden und Frequenzen nur eingeschränkt geeignet.

Um die Einschränkungen des Bedrosian Theorems zu umgehen, haben Huang und Long in [HL03] vorgeschlagen, eine Spline-Interpolation durch alle Maxima einer IMF g durchzuführen, die mit $u[g]$ bezeichnet wird, und die IMF g mit dieser designierten Amplitude $u[g]$ zu normieren,

$$g_{\text{norm}}(t) := \frac{g(t)}{u[g](t)}. \quad (4.6.2)$$

g_{norm} stellt die Trägerschwingung von g dar und hat im optimalen Fall Extremstellen, deren Absolutwerte gleich eins sind, d. h. mit der Normierung (4.6.2) soll die Approximation

$$g_{\text{norm}}(t) \approx \cos(\varphi(t)) \quad (4.6.3)$$

erreicht werden. Die Berechnung der Hilbert-Transformation von g_{norm} wird als normalisierte Hilbert-Transformation bezeichnet.

Die Anwendung der Hilbert-Transformation auf $\cos(\varphi)$ liefert aber nicht in jedem Fall $\sin(\varphi)$, wie in [NB66] gezeigt wurde und was im Abschnitt 2.8 ebenfalls diskutiert wird. Dieselbe Einschränkung gilt dann auch für die Hilbert-Transformation von g_{norm} , die eine Approximation von $\cos(\varphi)$ ist. Für die Abweichung der Hilbert-Transformation $\mathcal{H}[\cos(\varphi)](t)$ von $\sin(\varphi(t))$ wird in [NB66] der Fehler in der Energie

$$\Delta E := \int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\varphi(t)) - \mathcal{H}[\cos(\varphi)](t)|^2 dt = \int_{-\infty}^0 |\mathcal{F}[e^{i\varphi}](\omega)|^2 d\omega \quad (4.6.4)$$

bemessen. Dieses globale Fehlermaß kann in der Praxis nicht berechnet werden, weil die Funktion φ nicht bekannt ist. Huang schlägt daraufhin in [Hua05], S. 16 f. mit

$$e(t) := |u[g_{\text{norm}}](t) - 1| \quad (4.6.5)$$

ein lokales Fehlermaß vor, wobei $u[g_{\text{norm}}]$ die Spline-Interpolation durch die Maxima von g_{norm} bezeichnet. Allerdings wird mit dem Fehlermaß in Gleichung (4.6.5) der Fehler der Näherung (4.6.3) gemessen und ein Zusammenhang zu der Abweichung der Hilbert-Transformation $\mathcal{H}[\cos(\varphi)](t)$ von $\sin(\varphi(t))$, den der Fehler ΔE aus Gleichung (4.6.4) misst, wird angenommen, aber nicht hergeleitet.

Die Normierung der IMF g wurde in Gleichung (4.6.2) nur einmal durchgeführt. Dieser

Ansatz wird von Huang et al. in [HWL⁺09] weitergeführt, indem die Iteration

$$\begin{aligned} g_{\text{norm},1}(t) &:= \frac{g(t)}{u[g](t)}, \\ g_{\text{norm},2}(t) &:= \frac{g_{\text{norm},1}(t)}{u[g_{\text{norm},1}](t)}, \\ &\vdots \\ g_{\text{norm},n}(t) &:= \frac{g_{\text{norm},n-1}(t)}{u[g_{\text{norm},n-1}](t)} \end{aligned}$$

gebildet wird. Das Resultat dieser sogenannten Empirical AM-FM Decomposition, wobei AM und FM die Abkürzungen für Amplituden- und Frequenzmodulation sind, ist die Trennung der Amplitudenfunktion $\tilde{a}(t)$ und der Frequenzfunktion $\tilde{f}(t)$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &:= g_{\text{norm},n}(t) \approx \cos(\varphi(t)), \\ \tilde{a}(t) &:= \frac{s(t)}{\tilde{f}(t)} \approx a(t). \end{aligned}$$

Aufbauend darauf wird von Huang et al. in [HWL⁺09] die direkte Quadratur eingeführt, die die Berechnung der Hilbert-Transformation vollständig umgeht. Somit wird die Berechnung der globalen Integraltransformation der Hilbert-Transformation vermieden und die direkte Quadratur bekommt von Huang et al. die größtmögliche Lokalität attestiert. Die Methode geht von der Quadratur

$$\sin(\varphi(t)) = \sqrt{1 - \tilde{f}^2(t)}$$

der Funktion $\cos(\varphi(t))$ aus. Damit lässt sich die Phase φ als

$$\varphi(t) = \arctan \left(\frac{\tilde{f}(t)}{\sqrt{1 - \tilde{f}^2(t)}} \right)$$

schreiben, was die Methode der direkten Quadratur darstellt.

Die Berechnungen von instantanen Frequenzen über die normalisierte Hilbert-Transformation und über die direkte Quadratur liefern in den Beispielen aus [HWL⁺09] die besten Ergebnisse. Ein klarer Nachteil der normalisierten Hilbert-Transformation und der direkten Quadratur ist ihre heuristische Herleitung, die ebenso wie die EMD keine befriedigenden und allgemein gültigen theoretischen Aussagen und daraus folgende Weiterentwicklungen und Effizienzsteigerungen erlaubt.

4.7 Synchrosqueezed Wavelet Transforms

Die Arbeit [DLW09] von Daubechies, Lu und Wu beansprucht für sich, die Vorteile der EMD/EEMD bei ihrem alternativen Ansatz, der auf der kontinuierlichen Wavelet-Transformation basiert, mit einer soliden theoretischen Grundlage erreichen und beweisen zu können.

Unter den Vorteilen der EMD/EEMD ist vor allem die additive Zerlegung von Signalen in wenige in der Zeit-Frequenz-Ebene gut voneinander abgetrennte Komponenten zu verstehen. Synchrosqueezing ist eine spezielle Form der Reallokationsmethoden, deren Entwicklung in den 1990er Jahren begann (siehe [AF95], [CAF03] und [CDAF97]). Reallokationsmethoden verfolgen das Ziel, einer Zeit-Frequenz-Darstellung $R(t, \omega)$, also der Abbildung R auf der (t, ω) -Ebene mit den Bezeichnungen t für die Zeit und ω für die Frequenz, eine „schärfere“ Darstellung zu verleihen, indem die Werte $R(t, \omega)$ zu neuen Punkten (t', ω') zugeordnet werden. Eingeführt wurde das Synchrosqueezing von Daubechies und Maes bei der Entwicklung einer Methode zur Sprachsignalverarbeitung in [DM96].

Die Funktionsweise von Synchrosqueezing kann anhand eines einfachen harmonischen Signals erläutert werden. Sei

$$s(t) = A \cos(\omega t)$$

ein Signal mit konstanter Amplitude A und konstanter Frequenz ω . Sei ψ ein Wavelet mit nichtnegativem Träger des Fourier-Spektrums, d. h. $\mathcal{F}[\psi](\xi) = 0$ für $\xi < 0$, und bezeichne $\mathcal{W}_\psi[s](a, b)$ die kontinuierliche Wavelet-Transformation von s bezüglich des Wavelets ψ . Für $\mathcal{W}_\psi[s](a, b)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\psi[s](a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) a^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[s](\xi) a^{\frac{1}{2}} \overline{\mathcal{F}[\psi](a\xi)} e^{ib\xi} d\xi \\ &= \frac{A}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(\xi - \omega) + \delta(\xi + \omega)) a^{\frac{1}{2}} \overline{\mathcal{F}[\psi](a\xi)} e^{ib\xi} d\xi \\ &= \frac{A}{4\pi} a^{\frac{1}{2}} \overline{\mathcal{F}[\psi](a\omega)} e^{ib\omega}. \end{aligned}$$

Wenn $\mathcal{F}[\psi](\xi)$ um die Frequenz $\xi = \omega_0$ konzentriert ist, also wenn für die Durchschnittsfrequenz von $\mathcal{F}[\psi](\xi)$ die Gleichung $\langle \xi \rangle = \omega_0$ gilt, dann ist die Wavelet-Transformation $\mathcal{W}_\psi[s](a, b)$ um $a = \omega_0/\omega$ konzentriert. Jedoch weist $\mathcal{W}_\psi[s](a, b)$ eine weite Frequenzbandbreite um die horizontale Linie $a = \omega_0/\omega$ auf. In Abbildung 3.7 (b) des Beispiels 3.4.3 (i) kann dieser Effekt an dem hochfrequenten Anteil des dort behandelten Signals beobachtet werden. Es ist eine ebenso scharfe Darstellung des hochfrequenten Anteils wie des niedrigfrequenten Anteils in Abbildung 3.7 (b) gewünscht. Das führt zu der Berechnung eines Kandidaten für die instantane Frequenz

$$\omega_s(a, b) := -i \left(\mathcal{W}_\psi[s](a, b) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial b} \mathcal{W}_\psi[s](a, b) \quad (4.7.1)$$

für alle (a, b) mit $\mathcal{W}_\psi[s](a, b) \neq 0$. Damit erhält man für das einfache harmonische Signal s die gewünschte scharfe Darstellung $\omega_s(a, b) = \omega$.

Die Abbildung von der Zeit-Skalen-Ebene auf die Zeit-Frequenz-Ebene

$$(b, a) \mapsto (b, \omega_s(a, b)) \quad (4.7.2)$$

wird Synchrosqueezing genannt und kann für beliebige Signale definiert werden.

Definition 4.7.1. Sei $\mathcal{W}_\psi[s](a, b)$ die kontinuierliche Wavelet-Transformation des Signals s bezüglich des Wavelets ψ , das die Bedingung $\mathcal{F}[\psi](\xi) = 0$ für alle $\xi < 0$ erfüllt. Die *Synchrosqueezed Transform* $\mathcal{S}_\psi[s](b, \omega)$ von s ist definiert als

$$\mathcal{S}_\psi[s](b, \omega) := \int_{A(b)} \mathcal{W}_\psi[s](a, b) a^{-\frac{3}{2}} \delta(\omega_s(a, b) - \omega) da,$$

wobei $A(b) := \{a : \mathcal{W}_\psi[s](a, b) \neq 0\}$ und $\omega_s(a, b)$ wie in Gleichung (4.7.1) für alle (a, b) mit $a \in A(b)$ definiert sind.

Bemerkung 4.7.2. Die Bestimmung von Paaren (a, b) , für die $\mathcal{W}_\psi[s](a, b) = 0$ gilt, ist in der Praxis meist instabil, wenn das Signal s mit einem Rauschen behaftet ist. Aus diesem Grund wird das Integrationsgebiet $A(b)$ durch

$$A_\epsilon(b) := \left\{ a : |\mathcal{W}_\psi[s](a, b)| \geq \epsilon \right\}$$

ersetzt.

Bevor das zentrale Resultat aus [DLW09] von Daubechies et al. im Satz 4.7.5 vorgestellt wird, werden die folgenden beiden Definitionen benötigt, die eine zu den Intrinsic-Mode-Funktionen analoge Funktionenklasse einführen, und beschreiben, wann diese Funktionen genügend stark separiert sind.

Definition 4.7.3. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Intrinsic Mode Type (IMT)* mit Genauigkeit $\epsilon > 0$, falls f die Amplituden-Phasen-Darstellung

$$f(t) = A(t) e^{i\varphi(t)}$$

mit

$$A := |f| \in C^1(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R})$$

besitzt und

$$\begin{aligned} \inf_{t \in \mathbb{R}} \varphi'(t) &> 0, \\ |A'(t)|, |\varphi''(t)| &\leq \epsilon |\varphi'(t)| \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \\ \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi''(t)| &< \infty \end{aligned}$$

gilt.

Definition 4.7.4. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ besteht aus einer Superposition von *separierten IMT-Funktionen mit Genauigkeit ϵ und mit der Separationskonstanten d* , falls f die Gleichung

$$f(t) = \sum_{j=1}^n f_j(t)$$

erfüllt, wobei alle Funktionen f_j IMT sind und für die Phasenfunktionen φ_j von f_j

$$\varphi'_j(t) > \varphi'_{j-1}(t) \quad \text{und} \quad |\varphi'_j(t) - \varphi'_{j-1}(t)| \geq d(\varphi'_j(t) + \varphi'_{j-1}(t)) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

gilt.

Sei $\mathcal{A}_{\epsilon,d}$ die Menge aller Superpositionen separierter IMT-Funktionen bis zu der Genauigkeit ϵ mit der Separationskonstanten d .

Satz 4.7.5. *Seien*

- f eine Funktion aus $\mathcal{A}_{\epsilon,d}$,
- $\tilde{\epsilon}$ definiert als $\tilde{\epsilon} := \epsilon^{\frac{1}{3}}$,
- ψ ein Wavelet mit $\text{supp}(\mathcal{F}[\psi]) \subseteq [1 - \Delta, 1 + \Delta]$, wobei $\Delta < d/(1 + d)$ gilt, und
- $R_\psi := \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\psi](\xi) \xi^{-1} d\xi$ eine Konstante.

$\mathcal{W}_\psi[f](a, b)$ bezeichnet die kontinuierliche Wavelet-Transformation bezüglich des Wavelets ψ und $\mathcal{S}_{\psi, \tilde{\epsilon}}[f](b, \omega)$ ist das Ergebnis nach Synchrosqueezing von $\mathcal{W}_\psi[f]$ mit der Genauigkeit $\tilde{\epsilon}$, d. h.

$$\mathcal{S}_{\psi, \tilde{\epsilon}}[f](b, \omega) = \int_{A_{\tilde{\epsilon}}(b)} \mathcal{W}_\psi[f](a, b) a^{-\frac{3}{2}} \delta(\omega_f(a, b) - \omega) da,$$

wobei $A_{\tilde{\epsilon}}(b) := \{a \in \mathbb{R}_+ : |\mathcal{W}_\psi[f](a, b)| > \tilde{\epsilon}\}$. Dann gilt für genügend kleines ϵ :

(i) $|\mathcal{W}_\psi[f](a, b)| > \tilde{\epsilon}$ liegt dann vor, falls für ein $j \in \{1, \dots, n\}$

$$(a, b) \in Z_j := \{(a, b) : |a\varphi'_j(b) - 1| < \Delta\}$$

gilt.

(ii) Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ und für jedes Paar $(a, b) \in Z_j$ mit $|\mathcal{W}_\psi[f](a, b)| > \tilde{\epsilon}$ gilt

$$|\omega_f(a, b) - \varphi'_j(b)| \leq \tilde{\epsilon}.$$

(iii) Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ existiert eine Konstante C , sodass

$$\left| \left(R_\psi^{-1} \int_{|\omega - \varphi'_j(b)| < \tilde{\epsilon}} \mathcal{S}_{\psi, \tilde{\epsilon}}[f](b, \omega) d\omega \right) - f_j(b) \right| \leq C\tilde{\epsilon}$$

für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt.

Die wichtigen Aussagen des Satzes 4.7.5 lauten zusammengefasst, dass für eine Funktion $f \in \mathcal{A}_{\epsilon,d}$ die Synchronsqueezed Wavelet Transform $\mathcal{S}_{\psi,\tilde{\epsilon}}[f]$ von f in der (t, ω) -Ebene in schmalen Bändern um die Kurven $\omega = \varphi'_j(t)$ herum konzentriert ist und dass die Einschränkung von $\mathcal{S}_{\psi,\tilde{\epsilon}}[f]$ auf das j -te Band ausreicht, um aus der Synchronsqueezed Wavelet Transform die j -te IMT-Komponente von f mit hoher Präzision zu rekonstruieren. Der umfangreiche Beweis des Satzes 4.7.5 ist in [DLW09] zu finden.

Die Synchronsqueezed Wavelet Transform liefert in Anwendungen vergleichbar gute Ergebnisse wie die EMD und die EEMD. Sie bietet eine sehr gute Lokalisierung der Frequenzen, die im Vergleich zur kontinuierlichen Wavelet-Transformation erheblich verbessert wurde, und kann in einem in [DLW09] aufgeführten synthetischen Beispiel eine deutlich stabilere Zerlegung bezüglich Rauschen hervorbringen als die EEMD. Ob sie eine ebenbürtige oder gar bessere Alternative zur EMD/EEMD darstellt, muss in zukünftigen ausführlichen Vergleichen der Methoden gezeigt werden. Für die Beurteilung der Qualität alternativer Methoden sind praktische Vergleiche mit der EMD/EEMD nötig, da theoretische Herangehensweisen an die EMD bisher wenig gewinnbringend waren.

Das Synchronsqueezing hat die von der Wavelet-Transformation geerbte Einschränkung, dass sie keine irregulär verteilten Datenpunkte verarbeiten kann. Die Methode leistet zwar gegenüber der Wavelet-Transformation eine schärfere Darstellung in der Frequenzachse, aber die Zeitachse bleibt unberücksichtigt, wie an der Abbildung in der Gleichung (4.7.2) zu erkennen ist. Bei dem Vergleich verschiedener Zeit-Frequenz-Analysemethoden anhand von hydrologischen Zeitreihen im Abschnitt 3.5 wurde aber deutlich, dass das Wavelet-Energie-Spektrum im Vergleich zum Hilbert-Energie-Spektrum auch ein Verschmieren in der Zeit aufweist, das besonders offensichtlich in Abbildung 3.17 zum Ausdruck kommt.

Kapitel 5

Adaptive Wavelet-Approximation

Wavelets bilden die Basis für den adaptiven Algorithmus zur Approximation von irregulär verteilten Datenpunkten aus der Dissertation von Castaño [Cas05], der im Abschnitt 5.2 beschrieben wird. Der Approximationsalgorithmus von Castaño liefert später im Kapitel 6 die Basis für eine neuartige Methode. Die Grundlagen von Wavelets werden im ersten Abschnitt 5.1 dieses Kapitels vorgestellt, dessen Inhalt vorwiegend der Vorlesung „Wissenschaftliches Rechnen III: Wavelet- und Multiskalenmethoden“ von Kunoth, gehalten im Sommersemester 2009, entnommen ist.

5.1 Grundlagen von Wavelets

Zwar ist die erste Konstruktion von Wavelets, der Haar-Wavelets [Haa10], seit Anfang des 20. Jahrhunderts bekannt, aber erst ab Ende der 1980er Jahre wurden Methoden entwickelt, welche die Konstruktion von Wavelet-Familien mit höheren Anforderungen an die Eigenschaften Regularität, Orthogonalität, Symmetrie, kompakten Träger und verschwindende Momente ermöglichen. Dieser Durchbruch, der eine vielfältige Anwendung von Wavelets nach sich zog, nahm mit den Arbeiten von Mallat [Mal89], Meyer [Mey90a, Mey90b, MC91], [Mey91] und besonders Daubechies [Dau88, Dau92], die L_2 -orthogonale Wavelets mit kompaktem Träger und beliebiger Regularität konstruierte, seinen Anfang. Einige Jahre später wurde von Cohen, Daubechies und Feauveau [CDF92] der Begriff der Biorthogonalität eingeführt, der es ermöglicht, gewünschte Eigenschaften von Wavelets zu Lasten der L_2 -Orthogonalität zu verbessern. Schließlich konstruierten Kunoth, Dahmen und Urban [DKU99] biorthogonale Spline-Wavelets mit kompaktem Träger auf dem Intervall $[0, 1]$.

Für diese Arbeit werden Wavelets auf einem abgeschlossenem Intervall $\Omega \subset \mathbb{R}$ im Hilbertraum $L_2(\Omega)$ betrachtet, wobei Gebiete Ω höherer Dimension oder Sobolevräume als Hilberträume möglich wären, hier aber nicht benötigt werden. Den Rahmen für die Konstruktion von Wavelets bietet die Multiresolution von $L_2(\Omega)$ in der folgenden Definition.

Definition 5.1.1. Bezeichne $j \in \mathbb{Z}$ ein *Auflösungslevel* oder kurz *Level* und $j_0 \in \mathbb{Z}$ das größte Level.

- (i) Eine Folge $(S_j)_{j \geq j_0}$ abgeschlossener Unterräume von $L_2(\Omega)$, die ineinander verschachtelt sind, d. h.

$$S_j \subset L_2(\Omega) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{Z}$$

und

$$S_{j_0} \subset S_{j_0+1} \subset S_{j_0+2} \subset \dots, \quad (5.1.1)$$

heißt *Multiresolution von $L_2(\Omega)$* , falls sie dicht in $L_2(\Omega)$ liegt,

$$\overline{\bigcup_{j \geq j_0} S_j}^{L_2(\Omega)} = L_2(\Omega),$$

und

$$\bigcap_{j \geq j_0} S_j = S_{j_0}$$

gilt. Die S_j werden *Ansatzräume* genannt.

- (ii) Eine Menge von Funktionen $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \Delta_j}$ auf dem Level j , wobei Δ_j eine endliche Indexmenge ist und $\#\Delta_j$ die Anzahl der Elementen von Δ_j bezeichnet, heißt *gleichmäßig stabil*, falls zwei von j unabhängige Konstanten C_1 und C_2 mit $0 < C_1, C_2 < \infty$ existieren, sodass

$$C_1 \|\mathbf{c}\|_{l_2(\Delta_j)} \leq \|\mathbf{c}^\top \boldsymbol{\phi}_j\|_{L_2(\Omega)} \leq C_2 \|\mathbf{c}\|_{l_2(\Delta_j)} \quad \text{für alle } \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{\#\Delta_j})^\top \in l_2(\Delta_j) \quad (5.1.2)$$

gilt. Für $\boldsymbol{\phi}_j$ gilt die Definition $\boldsymbol{\phi}_j := (\phi_{j,1}, \dots, \phi_{j,\#\Delta_j})^\top$. Die Bedingung (5.1.2) wird mit

$$\|\mathbf{c}\|_{l_2(\Delta_j)} \sim \|\mathbf{c}^\top \boldsymbol{\phi}_j\|_{L_2(\Omega)} \quad \text{für alle } \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{\#\Delta_j})^\top \in l_2(\Delta_j) \quad (5.1.3)$$

abgekürzt.

Die Ansatzräume S_j werden jeweils von einer Basis $\boldsymbol{\phi}_j := \{\phi_{j,k} : k \in \Delta_j\}$ aufgespannt, die gleichmäßig stabil ist und *Generator* oder *Einzelskalenbasis* auf Level j genannt wird. Die Bezeichnung $\boldsymbol{\phi}_j$ wird sowohl für eine Menge von Funktionen als auch für einen Vektor von Funktionen verwendet. Für den Träger von $\phi_{j,k}$ soll

$$\text{diam}(\text{supp } \phi_{j,k}) \sim 2^{-j} \quad \text{für alle } k \in \Delta_j$$

gelten. Wegen der Schachtelungseigenschaft $S_j \subset S_{j+1}$ aus (5.1.1) lassen sich die Einzelskalenfunktionen $\phi_{j,k}$ mittels der Verfeinerungsgleichung

$$\phi_{j,k}(t) = \sum_{r \in \Delta_{j+1}} m_{r,k} \phi_{j+1,r}(t) \quad \text{für alle } k \in \Delta_j$$

mit den Maskenkoeffizienten $m_{r,k} \in \mathbb{R}$ ausdrücken, was als Matrix-Vektor-Multiplikation

$$\boldsymbol{\phi}_j(t) = \mathbf{M}_{j,0}^\top \boldsymbol{\phi}_{j+1}(t) \quad (5.1.4)$$

mit der Maskenmatrix $\mathbf{M}_{j,0} := (m_{r,k})_{r \in \Delta_{j+1}, k \in \Delta_j} \in \mathbb{R}^{(\#\Delta_{j+1}) \times (\#\Delta_j)}$ geschrieben werden kann.

Definition 5.1.2. Funktionen

$$\psi_j := \{\psi_{j,k} : k \in \nabla_j\}$$

mit $\nabla_j := \Delta_{j+1} \setminus \Delta_j$, für die

$$\text{span}(\phi_{j+1}) = \text{span}(\phi_j) \oplus \text{span}(\psi_j)$$

gilt, was mit der Definition $W_j := \text{span}(\psi_j)$ zu

$$S_{j+1} = S_j \oplus W_j \quad (5.1.5)$$

abgekürzt wird, und für die die Menge $\{\phi_j \cup \psi_j\}$ gleichmäßig stabil nach (5.1.3) ist, heißen *Wavelets*.

Für Wavelets kann ähnlich wie für Einzelskalenfunktionen eine sogenannte Zweiskalengleichung

$$\psi_j(t) = \mathbf{M}_{j,1}^\top \phi_{j+1}(t) \quad (5.1.6)$$

mit $\mathbf{M}_{j,1} \in \mathbb{R}^{(\#\Delta_{j+1}) \times (\#\nabla_j)}$ angegeben werden. Die Gleichung (5.1.5) ist äquivalent dazu, dass die lineare Abbildung

$$\mathbf{M}_j := \left(\mathbf{M}_{j,0} \mid \mathbf{M}_{j,1} \right) : l_2(\Delta_j \cup \nabla_j) \rightarrow l_2(\Delta_{j+1})$$

invertierbar ist. Damit und mit der Verfeinerungsgleichung für Einzelskalenfunktionen (5.1.4) und der Zweiskalengleichung für Wavelets (5.1.6) können die folgenden Basistransformationen zwischen den Räumen S_{j+1} und $S_j \oplus W_j$ angegeben werden

$$\begin{aligned} \text{von } S_{j+1} \text{ nach } S_j \oplus W_j : \quad \begin{bmatrix} \phi_j(t) \\ \psi_j(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{M}_j^\top \phi_{j+1}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{j,0}^\top \\ \mathbf{M}_{j,1}^\top \end{bmatrix} \phi_{j+1}(t), \\ \text{von } S_j \oplus W_j \text{ nach } S_{j+1} : \quad \phi_{j+1}(t) &= \mathbf{G}_j^\top \begin{bmatrix} \phi_j(t) \\ \psi_j(t) \end{bmatrix} = (\mathbf{M}_j^{-1})^\top \begin{bmatrix} \phi_j(t) \\ \psi_j(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

wobei die Definition $\mathbf{G}_j := \mathbf{M}_j^{-1}$ benutzt wurde. Es ergibt sich somit für ein größtes Level $j_0 \in \mathbb{Z}$ die *Multiskalenbasis*

$$\psi := \phi_{j_0} \cup \bigcup_{j \geq j_0} \psi_j$$

von $L_2(\Omega)$. Zu einem endlichen maximalen Level $J \geq j_0$ kann jede Funktion $v \in S_J$ sowohl in der Einzelskalendarstellung

$$v = \mathbf{c}_J^\top \phi_J = \sum_{k \in \Delta_J} c_{J,k} \phi_{J,k}$$

mit eindeutigen Koeffizienten $\mathbf{c}_J$ als auch in der Multiskalendarstellung

$$v = (\mathbf{d}^J)^\top \psi^J = \mathbf{c}_{j_0}^\top \phi_{j_0} + \sum_{j=j_0}^{J-1} \mathbf{d}_j^\top \psi_j = \sum_{k \in \Delta_{j_0}} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k \in \nabla_j} d_{j,k} \psi_{j,k}$$

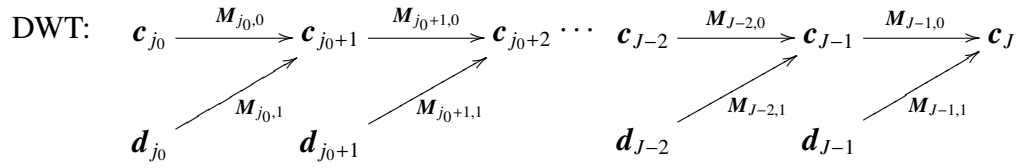


Abbildung 5.1: Pyramidenschema der diskreten Wavelet-Transformation

mit eindeutigen Koeffizienten

$$\mathbf{d}^J := (\mathbf{c}_{j_0}, \mathbf{d}_{j_0}, \mathbf{d}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{d}_{J-1})^\top$$

und der Multiskalenbasis

$$\psi^J := \phi_{j_0} \cup \bigcup_{j=j_0}^{J-1} \psi_j$$

geschrieben werden.

Definition 5.1.3. Die *diskrete Wavelet-Transformation (DWT)*

$$T_J : l_2(\Delta_J) \rightarrow l_2(\Delta_J), \quad \mathbf{d}^J \mapsto \mathbf{c}_J$$

ist definiert als das Matrixprodukt

$$T_J := T_{J,J-1} T_{J,J-2} \cdots T_{J,j_0},$$

wobei die jeweiligen Matrizen $T_{J,j}$ als

$$T_{J,j} := \begin{bmatrix} \mathbf{M}_j & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{(\#\Delta_J) - (\#\Delta_{j+1})} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\#\Delta_J) \times (\#\Delta_J)}$$

mit der n -dimensionalen Einheitsmatrix $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert sind. Die Inverse von T_J

$$T_J^{-1} = T_{J,j_0}^{-1} T_{J,j_0+1}^{-1} \cdots T_{J,J-1}^{-1}$$

mit

$$T_{J,j}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_j & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{(\#\Delta_J) - (\#\Delta_{j+1})} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\#\Delta_J) \times (\#\Delta_J)}$$

heißt *inverse diskrete Wavelet-Transformation (inverse DWT)*.

Die DWT bzw. die inverse DWT lässt sich mit dem Pyramidenschema in Abbildung 5.1 bzw. Abbildung 5.2 darstellen. Es können Wavelets konstruiert werden, sodass für die Anwendung der Matrizen $\mathbf{M}_j$ und $\mathbf{G}_j$ auf einen Koeffizientenvektor $O(N_{j+1})$ arithmetische Operationen erforderlich sind, wobei $N_{j+1} := \#\Delta_{j+1}$ gilt. Die Anwendung der DWT bzw. der inversen

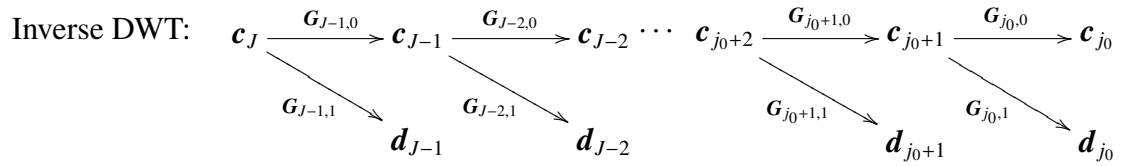


Abbildung 5.2: Pyramidenschema der inversen diskreten Wavelet-Transformation

DWT benötigt dann nach den jeweiligen Pyramidenschemen $O(N_J)$ Operationen und ist somit von optimaler Komplexität. Jedoch darf dafür die Matrix T_J nicht explizit aufgestellt werden. Die diskrete Wavelet-Transformation wird aufgrund der optimalen Komplexität auch schnelle Wavelet-Transformation (FWT) genannt.

Es existieren verschiedene Multiskalenbasen, die aus unterschiedlichen Einzelskalenfunktionen und Wavelets zusammengesetzt sind. Eine wichtige Eigenschaft der Multiskalenbasen ist ihre Orthogonalität bezüglich des L_2 -Skalarprodukts, bei der diese drei Arten von Orthogonalität unterschieden werden:

- *orthogonal*: Die Einzelskalenfunktionen ϕ_{j_0} sind zueinander orthogonal, die Wavelets ψ_j für $j \geq j_0$ sind zueinander orthogonal und die Wavelets sind orthogonal zu den Einzelskalenfunktionen, d. h.

$$\begin{aligned} (\phi_{j_0,k}, \phi_{j_0,m})_{L_2(\Omega)} &= \delta_{km} && \text{für alle } k, m, \\ (\psi_{j,k}, \psi_{l,m})_{L_2(\Omega)} &= \delta_{jl} \delta_{km} && \text{für alle } j, k, l, m, \\ (\psi_{j,k}, \phi_{j_0,m})_{L_2(\Omega)} &= 0 && \text{für alle } j, k, m. \end{aligned}$$

Das kann in der kürzeren Schreibweise

$$(\psi, \psi)_{L_2(\Omega)} = \mathbf{I}$$

ausgedrückt werden, wobei die Dimension der Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ unbeschränkt ist.

- *semiorthogonal*: Die Wavelets auf unterschiedlichen Levels sind orthogonal zueinander

$$(\psi_{j,k}, \psi_{l,m})_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \text{für } j \neq l \text{ und für alle } k, m.$$

- *biorthogonal*: Zu einer Multiskalenbasis ψ existiert eine duale Multiskalenbasis $\widetilde{\psi}$ und die beiden Basen erfüllen die Orthogonalitätsbedingung

$$(\psi, \widetilde{\psi})_{L_2(\Omega)} = \mathbf{I}.$$

Abgesehen von der Orthogonalität gibt es noch weitere wichtige Eigenschaften von Wavelets, die bei ihrer Konstruktion beachtet werden können und die nun kurz zusammenfassen werden:

- *Kompakter Träger*: Die Träger von Wavelets und von Einzelskalenfunktionen beeinflussen die Anzahl der nicht-null Einträge der Maskenmatrizen $\mathbf{M}_{j,0}$ und $\mathbf{M}_{j,1}$ und somit die Effizienz von Berechnungen mit diesen Matrizen. Außerdem machen kompakte Träger das Arbeiten mit Wavelets auf Intervallen möglich, ohne dass dabei Abschneidefehler erzeugt werden.
- *Glattheit oder Regularität*: Glatte Funktionen lassen sich besser durch Linearkombinationen glatter Funktionen darstellen, aber glattere Wavelets weisen einen größeren Träger auf.
- *Symmetrie*: Für manche Anwendungen sind bezüglich ihres Mittelpunkts symmetrische Wavelets vorteilhaft.
- *Verschwindende Momente*: Ein Wavelet $\psi_{j,k}$ hat genau dann m verschwindende Momente, falls

$$\left(\psi_{j,k}(t), t^n\right)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } n = 0, \dots, m-1$$

gilt.

Es ist möglich, jedem Wavelet-Level eine bestimmte Frequenz zuzuordnen, es besteht somit ein Zusammenhang zwischen den Levels der Multiresolution und Frequenzen. Bei der kontinuierlichen Wavelet-Transformation ist die den Levels der DWT entsprechende Skala nicht dyadisch und ganzzahlig wie bei der diskreten Wavelet-Transformation, sondern kontinuierlich. Die kontinuierliche Skala der kontinuierlichen Wavelet-Transformation kann mehr Frequenzen darstellen als die dyadischen Levels der DWT. Das ermöglicht der kontinuierlichen Wavelet-Transformation eine höhere Auflösung von Frequenzen und folglich eignet sie sich besser als die DWT für die Zeit-Frequenz-Analyse von Signalen.

Definition 5.1.4. Die Multiskalenfunktionen $\psi := \{\psi_\lambda : \lambda \in \mathbb{I}\}$, wobei $\mathbb{I}$ eine Indexmenge mit allen Levels und allen Orten ist, bilden eine *Riesz-Basis von $L_2(\Omega)$* , falls jedes $v \in L_2(\Omega)$ eine eindeutige Entwicklung

$$v = \sum_{\lambda \in \mathbb{I}} v_\lambda \psi_\lambda$$

mit der Normäquivalenz

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} \sim \|\mathbf{v}\|_{l_2(\mathbb{I})} \quad (5.1.7)$$

besitzt. $\mathbf{v}$ ist als der Vektor $\mathbf{v} := (\dots, v_\lambda, \dots)^\top$ definiert.

Für die adaptive Wavelet-Approximation im nächsten Abschnitt 5.2 werden, der Dissertation von Castaño [Cas05] folgend, stückweise lineare randangepasste B-Spline-Wavelets aus [SDS96] verwendet, die ein Spezialfall der von Chui et al. entwickelten (Pre-)Wavelets auf dem Intervall sind (siehe [Chu92, CQ92]). Diese Wavelets bilden eine Riesz-Basis von $L_2(\Omega)$, sie sind semiorthogonal und sie besitzen einen kompakten Träger, für den

$$\text{diam}(\text{supp } \psi_{j,k}) \sim 2^{-j} \quad (5.1.8)$$

gilt.

5.2 Adaptive Datenapproximation mit B-Spline-Wavelets

Mit B-Spline-Wavelets ist es Castaño in seiner Dissertation [Cas05] gelungen, einen effizienten Algorithmus für die Approximation beliebig verteilter Datenpunkte zu entwickeln. Informationen zu diesem Algorithmus sind außerdem in [CK03] und [CK06] zu finden. Dieser Abschnitt orientiert sich stark an den Kapiteln 1, 2 und 4 aus [Cas05]. Zunächst wird das Data-Fitting-Problem formuliert.

Problem 5.2.1. Gegeben sei eine Menge beliebig verteilter und nicht zusammenfallender Punkte $P := \{(\mathbf{x}_i, z_i) \in [0, 1]^d \times \mathbb{R} : i = 1, \dots, N\}$ mit $d \in \{1, 2, 3\}$, die konstituiert wird durch die horizontalen Werte $X := \{\mathbf{x}_i\}_{i=1, \dots, N}$ und die vertikalen Werte $Z := \{z_i\}_{i=1, \dots, N}$. Gesucht ist eine Funktion $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} d_\lambda \psi_\lambda,$$

wobei ψ_λ B-Spline-Wavelets und $d_\lambda \in \mathbb{R}$ Koeffizienten sind und $\Lambda \subset \mathbb{I}$ eine Indexmenge ist. Die Funktion f soll die in der Punktmenge P enthaltenen Informationen so darstellen, dass P im Least-Squares-Sinne approximiert wird, d. h. die Koeffizienten d_λ sollen so gewählt werden, dass

$$\sum_{i=1}^N (z_i - f(\mathbf{x}_i))^2 \quad (5.2.1)$$

minimiert wird.

Die Lösung des Data-Fitting-Problems kann durch das folgende Vorgehen erreicht werden. Zu einer festen Indexmenge Λ werden die Koeffizienten d_λ berechnet, indem in (5.2.1) die Ableitungen nach $\frac{\partial}{\partial d_\lambda}$ für alle $\lambda \in \Lambda$ gebildet werden und man erhält damit die Normalengleichungen

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{A}^\top \mathbf{z}, \quad (5.2.2)$$

wobei $\mathbf{d}$ der Spaltenvektor der Koeffizienten d_λ ist und $\mathbf{z}$ als $\mathbf{z} := (z_1 \dots, z_N)^\top$ definiert ist. Die Normalengleichungen (5.2.2) können mit $\mathbf{M} := \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ und $\mathbf{b} := \mathbf{A}^\top \mathbf{z}$ in die kürzere äquivalente Schreibweise

$$\mathbf{M} \mathbf{d} = \mathbf{b} \quad (5.2.3)$$

überführt werden. Die Einträge der Beobachtungsmatrix $\mathbf{A}$, der Kreuzproduktmatrix (oder

Koeffizientenmatrix) $\mathbf{M}$ und des Vektors $\mathbf{b}$ sind definiert als

$$\begin{aligned} A_{i,\lambda} &:= \psi_\lambda(\mathbf{x}_i), \\ M_{\lambda,\lambda'} &:= \sum_{i=1}^N \psi_\lambda(\mathbf{x}_i) \psi_{\lambda'}(\mathbf{x}_i), \\ b_\lambda &:= \sum_{i=1}^N z_i \psi_\lambda(\mathbf{x}_i). \end{aligned}$$

Die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{M}$ weisen wegen der Lokalitätseigenschaft (5.1.8) der stückweise linearen randangepassten B-Spline-Wavelets eine dünn besetzte Struktur auf. Des Weiteren sind die Matrizen der Normalgleichungen aufgrund der Semiorthogonalität und der gleichmäßigen Stabilität der verwendeten Wavelets gut konditioniert. Bei der numerischen Lösung des linearen Gleichungssystems (5.2.2) bzw. (5.2.3) ist es mit direkten Lösern wie der QR-Methode schwierig, dünn besetzte Strukturen von Matrizen auszunutzen. Aus diesem Grund und wegen der guten Kondition der Matrizen der Normalgleichungen ist es für die Lösung von (5.2.2) bzw. (5.2.3) sinnvoller, schnelle iterative Löser zu benutzen. Es können entweder ein cg-Verfahren, das mit der explizit aufgestellten Matrix $\mathbf{M}$ arbeitet, oder verwandte Verfahren, die mit der Matrix $\mathbf{A}$ arbeiten, wie CGLS (Conjugate Gradient for Least Squares) oder LSQR, das eine auf der Lanczos Bidiagonalisierung basierende Methode ist, verwendet werden.

Für die Lösung des Problems 5.2.1 ist die Wahl der Indexmenge Λ essentiell. Λ sollte einerseits groß genug sein, um die Eigenschaften der Punktmenge P abzubilden. Andererseits kann eine zu große Indexmenge zum Overfitting von P , d. h. zu unerwünschten Oszillationen, die wegen zu weniger horizontaler Werte in den Trägern der Wavelets entstehen, oder dazu, dass redundante vertikale Werte die Berechnungszeit unnötig erhöhen (siehe [Cas05], S. 7 f.) führen. Die Lokalitätseigenschaft der Wavelets (5.1.8) ermöglicht es, einen grob-nach-fein Algorithmus anzugeben, der mittels einer rekursiven Konstruktion einer Folge von Indexmengen $(\Lambda_j)_{j \geq j_0}$ das Overfitting der Punktmenge P verhindert. Dabei enthält eine Indexmenge Λ_j mit $j \geq j_0$ jeweils Wavelet-Indizes vom größten Level j_0 bis zum Level j . Der Algorithmus beginnt mit der Wahl einer geeigneten Indexmenge Λ_{j_0} mit allen Einzelskalenfunktionen und allen Wavelets auf dem größten Level j_0 . Anschließend werden die Kinder der Wavelets betrachtet. Dabei heißt ein Wavelet mit Index $\lambda = (j, k)$ Kind eines Wavelets mit Index $\lambda' = (j', k')$, falls $j = j' + 1$ gilt und $k = 2k'$ oder $k = 2k' + 1$ gilt. Zu der nächstgrößeren Indexmenge Λ_{j_0+1} werden nur die Kinder, die eine festgelegte Anzahl der horizontalen Werte in ihrem Träger enthalten, hinzugenommen. Der vollständige Algorithmus mit der Notation

- j_0 größtes Level,
- q Anzahl der Punkte, die mindestens im Träger der Wavelets enthalten sein müssen,
- $\delta(\Lambda_j)$ Indexmenge der Kinder-Wavelets auf Level $j + 1$,
- $T_q(\Lambda_j)$ Untermenge von Λ_j , dessen Elemente mehr als q Punkte in ihrem Träger aufweisen

lautet:

Algorithmus 5.2.2 (Horizontal Thresholding).

```

wähle  $j_0$  und  $q$ 
erstelle  $\Lambda_{j_0}$ 
FOR  $j = j_0, j_0 + 1, j_0 + 2, \dots$ 
    erstelle  $\delta(\Lambda_j)$ 
    bestimme  $T_q(\delta(\Lambda_j))$ 
    IF  $T_q(\delta(\Lambda_j)) = \emptyset$ 
         $\Lambda := \Lambda_j$ 
        BREAK FOR
    ELSE
         $\Lambda_{j+1} := \Lambda_j \cup T_q(\delta(\Lambda_j))$ 

```

Für eine effiziente Implementierung werden für die Bestimmung der Punkte im Träger eines Wavelets ψ_λ nur die Punkte überprüft, die sich im Träger dessen Eltern-Wavelets befinden, anstatt eine Schleife über alle Punkte laufen zu lassen. Im Algorithmus 5.2.2 ist nicht sichergestellt, dass die Kreuzproduktmatrizen $\mathbf{M}_j$ der Normalengleichungen (5.2.3) zu jeder Indexmenge Λ_j nichtsingulär sind. Aus diesem Grund entwickelt und beweist Castaño in [Cas05] ein Verfahren, das die Invertierbarkeit von $\mathbf{M}_j$ für alle j gewährleistet, wozu Modifikationen bei der Bestimmung von $T_q(\Lambda_j)$ nötig sind.

Der Algorithmus 5.2.2 für horizontale Adaptivität kann zwar die Konstruktion einer Menge Λ mit Wavelets an Orten des Gebiets, an denen nicht genügend Informationen verfügbar sind, verhindern, aber er erkennt nicht, ob die Informationen redundant sind. Dies kann durch eine zusätzliche Kontrolle bei der Bestimmung der Menge Λ_j erreicht werden. Dazu wird eine Approximation bis zum Level $j + 1$ konstruiert, wobei das Minimierungsproblem

$$\sum_{i=1}^N \left(z_i - \sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_\lambda^j \psi_\lambda(\mathbf{x}_i) \right)^2 \rightarrow \min!$$

für die Koeffizienten $\{d_\lambda^j\}_{\lambda \in \Lambda_j}$ bereits gelöst sein soll. Der Absolutwert der Koeffizienten kann wegen der Normäquivalenz (5.1.7) der Riesz-Basis-Eigenschaft der verwendeten Wavelets als ein lokaler Schätzer für die Glattheit interpretiert werden. Betragsmäßig große Koeffizienten signalisieren, dass an diesem Ort weiter verfeinert werden sollte, während betragsmäßig kleine Koeffizienten geringere Verbesserungen der Approximation liefern und gegebenenfalls weggelassen werden können. Der horizontal adaptive Algorithmus 5.2.2 wird nun um diese vertikale Adaptivität erweitert.

Algorithmus 5.2.3 (Vertical Thresholding).

```

wähle  $j_0, q$  und  $\epsilon > 0$ 
erstelle  $\Lambda_{j_0}$ 
FOR  $j = j_0, j_0 + 1, j_0 + 2, \dots$ 
  erstelle  $\delta(\Lambda_j)$ 
  bestimme  $T_q(\delta(\Lambda_j))$  und setze  $\tilde{\Lambda}_{j+1} := \Lambda_j \cup T_q(\delta(\Lambda_j))$ 
  berechne  $\{d_\lambda^{j+1}\}_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_{j+1}}$  als Lösung von  $\sum_{i=1}^N \left( z_i - \sum_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_{j+1}} d_\lambda^{j+1} \psi_\lambda(\mathbf{x}_i) \right)^2 \rightarrow \min!$ 
  setze  $\Lambda_j^\epsilon := \{ \lambda \in T_q(\delta(\Lambda_j)) : |d_\lambda^{j+1}| \geq \epsilon \}$ 
  IF  $\Lambda_j^\epsilon = \emptyset$ 
     $\Lambda := \Lambda_j$ 
    BREAK FOR
  ELSE
     $\Lambda_{j+1} := \Lambda_j \cup \Lambda_j^\epsilon$ 

```

Zum Abschluss dieses Abschnitts werden die folgenden Eigenschaften des Data-Fitting-Algorithmus 5.2.3 angegeben.

- *Irreguläre Punkteverteilung:* Für die Anwendung des Algorithmus müssen keine äquidistant verteilten Datenpunkte vorliegen, wie es z. B. für die diskrete Wavelet-Transformation nötig wäre, sondern er wurde speziell dafür entwickelt, irregulär verteilte Daten zu approximieren.
- *Multivariate Daten:* Der Algorithmus kann leicht für multivariate Daten erweitert werden und seine Adaptivität macht ihn für die Anwendung auf höherdimensionale Daten sogar besonders interessant. Bei Hinzufügen eines vollen dyadischen Levels zu einer Indexmenge Λ_j kommen $\sim 2^{d(j+1)}$ Freiheitsgrade hinzu. Beim Auflösen einer Punktsingularität mit dem Algorithmus 5.2.3 wird beim Hinzufügen ausschließlich der Wavelets, deren Träger die Punktsingularität enthalten, die Anzahl der Freiheitsgrade dagegen nur um $k2^d$ erhöht. Die Konstante k hängt von der verwendeten Wavelet-Familie ab. Das Verhältnis

$$\frac{\text{\# Freiheitsgrade bei adaptivem Hinzufügen}}{\text{\# Freiheitsgrade bei Hinzufügen eines vollen Levels}} \sim \frac{k2^d}{2^{d(j+1)}} = k2^{-dj}$$

verdeutlicht die Verringerung der Komplexität bei höheren Dimensionen. Das Verhältnis der Komplexitätsverringerung bewirkt, dass die Normalgleichungen ein um dieses Verhältnis verkleinertes System liefern, d. h. man erhält wegen der Adaptivität ein System der Größe $(k2^d) \times (k2^d)$ statt eines Systems der Größe $(2^{d(j+1)}) \times (2^{d(j+1)})$.

- *Nested Iteration:* Die im Algorithmus erforderliche Lösung des Minimierungsproblems in jedem Iterationsschritt kann mit einer Nested-Iteration-Strategie beschleunigt wer-

den, indem die zuletzt berechnete Lösung in den Startwert des zu berechnenden Minimierungsproblems mit eingearbeitet wird.

- *Glättung der Approximation*: Eine Glättung der Approximation ist möglich. Dazu wird das modifizierte zu minimierende Funktional

$$\sum_{i=1}^N (z_i - f(\mathbf{x}_i))^2 + \nu \|f\|_Y^2 \quad (5.2.4)$$

betrachtet, wobei $\nu > 0$ ein Parameter zur Steuerung der Glattheit ist und Y für gewöhnlich als der Sobolevraum $H^1(\Omega)$ oder $H^2(\Omega)$ gewählt wird. Die verwendeten Wavelets $\{\psi_\lambda : \lambda \in \mathbb{I}\}$ bilden eine Riesz-Basis von $L_2(\Omega)$ entsprechend der Definition 5.1.4 und erfüllen die Normäquivalenz für Funktionen im Sobolevraum $H^\alpha(\Omega)$

$$\left\| \sum_{\lambda \in \mathbb{I}} d_\lambda \psi_\lambda \right\|_{H^\alpha(\Omega)}^2 \sim \sum_{j \geq j_0} 2^{2\alpha j} \sum_{k,e} |d_{j,k,e}|^2 \quad \text{für alle } \alpha \in [0, \gamma), \quad (5.2.5)$$

wobei der Parameter γ von der Glattheit der verwendeten Wavelet-Familie abhängt. Mit der Normäquivalenz (5.2.5) können die Normalgleichungen

$$(\mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \nu \mathbf{R}) \mathbf{d} = \mathbf{A}^\top \mathbf{z}$$

für das Funktional (5.2.4) aufgestellt werden. Da die Matrix $\mathbf{R}$ eine Diagonalmatrix der Form

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2^{2\alpha j_0} \mathbf{I} & & \\ & \ddots & \\ & & 2^{2\alpha j} \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

ist, erhöht sich der Rechenaufwand im Algorithmus 5.2.3 mit einer Glättung der Approximation mittels des Funktionals (5.2.4) nur geringfügig.

- *Erkennen von Messfehlern*: Der Algorithmus kann zu einer Prozedur erweitert werden, die in der Lage ist, Ausreißer, z. B. bei messfehlerbehafteten Daten, zu erkennen.

Kapitel 6

EMD mittels adaptiver Wavelet-Approximation

6.1 Idee des neuen Ansatzes

Im Kapitel 3 wurden eine Reihe positiver Eigenschaften der EMD bei der Zeit-Frequenz-Analyse von Signalen deutlich. Die EMD bietet eine sehr weit gefasste Adaptivität, denn es werden nur wenige Voraussetzungen an die Signale gestellt. Die Signale können nichtstationär und nichtlinear sein und die Datenpunkte müssen nicht auf einem uniformen Gitter liegen, sondern können irregulär verteilt sein. Die Stärke der EMD besteht darin, solche Signale in eine geringe Anzahl von IMF-Komponenten zu zerlegen. Die IMF-Komponenten bilden eine adaptiv aus dem Signal hervorgegangene Basis. Weiterhin lässt sich aus den IMF-Komponenten eine physikalisch sinnvolle instantane Frequenz berechnen und damit kann das Signal einer Spektralanalyse unterzogen werden. Das aus der EMD eines Signals berechnete Spektrum weist in der Praxis eine deutlich höhere Schärfe als das Fourier-Spektrogramm und das Wavelet-Spektrum auf und die IMF-Komponenten sind darin klar voneinander abgetrennt.

Die EMD ist aber auch ein heuristisches und empirisch entwickeltes Verfahren, das das Formulieren theoretischer Aussagen erschwert und dadurch Zweifel an der Aussagekraft ihrer Ergebnisse schafft. Wichtig wären in diesem Zusammenhang Aussagen zur Konvergenz des EMD-Algorithmus und zur Eindeutigkeit seiner Zerlegung. Auch in Anwendungen der EMD offenbaren sich Probleme, wie das Auftreten negativer instantaner Frequenzen, wenn auch nur mit geringen Amplituden. Sharpley und Vatchev konnten außerdem in [SV06] nachweisen, dass die Definition für IMFs von Huang et al. in [HSL⁺98] nicht ausreicht, um negative instantane Frequenzen bei IMFs auszuschließen. Zahlreiche Probleme der EMD und offene Fragen wurden bereits im Abschnitt 3.6 diskutiert.

Bei einem Versuch die angesprochenen Probleme ganz oder teilweise zu beheben, erscheint es wegen des Problems der Formulierung theoretischer Aussagen wenig erfolgsversprechend, Modifikationen an dem EMD-Algorithmus vorzunehmen. Eine andere Möglichkeit ist, zu versuchen, die positiven Eigenschaften der EMD mit einem alternativen Ansatz zu erreichen.

In diesem Abschnitt wird eine neuartige Methode basierend auf der adaptiven Wavelet-

Approximation aus dem Kapitel 5 vorgestellt. Die adaptive Datenapproximation mit B-Spline-Wavelets aus dem Abschnitt 5.2 liefert die approximative Zerlegung

$$s(t) \approx \sum_{j=j_0}^J \mathbf{d}_j^\top \boldsymbol{\psi}_j(t) + \mathbf{c}_{j_0}^\top \boldsymbol{\phi}_{j_0}(t) = \sum_{j=j_0}^J \sum_{k \in \nabla_j} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{k \in \Delta_{j_0}} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) \quad (6.1.1)$$

des Signals s in Wavelets $\boldsymbol{\psi}_j$ auf den Levels j_0 bis J und Einzelskalenfunktionen $\boldsymbol{\phi}_{j_0}$ auf dem Level j_0 . Die Bezeichnungen in der Gleichung (6.1.1) sind wie im Abschnitt 5.1 gewählt. Der neue und hier erstmals vorgestellte Ansatz besteht darin, die Linearkombinationen der Wavelets auf den Levels j als die j -en IMF-Komponenten g_j und die Linearkombination der Einzelskalenfunktionen als das Residuum r_n der EMD aufzufassen, d. h.

$$\begin{aligned} g_j(t) &= \mathbf{d}_j^\top \boldsymbol{\psi}_j(t), \\ r_n(t) &= \mathbf{c}_{j_0}^\top \boldsymbol{\phi}_{j_0}(t). \end{aligned}$$

Auf diese Weise ermöglicht die adaptive Wavelet-Approximation bei Verwendung der semiorthogonalen B-Spline-Wavelets eine additive Zerlegung in zueinander orthogonale Komponenten g_j , die wegen der dyadischen Levels der Wavelets die Eigenschaft einer dyadischen Filterbank analog zu der EMD/EEMD aufweisen. Die Konvergenz des Verfahrens ist gegeben und es können auch irregulär verteilte Datenpunkte verarbeitet werden. Darüber hinaus kann die Glattheit der Approximation gesteuert werden und das Erkennen von Messfehlern ist möglich. Die Anwendung des adaptiven Approximationsalgorithmus hatte bedeutende Vorteile gegenüber nichtadaptiven Methoden im Hinblick auf die Komplexität in höheren Raumdimensionen. Dieses kann bei einer Verallgemeinerung der hier vorgestellten Alternative zur EMD auf multivariate Daten ausgenutzt werden. Die Komplexität reduziert sich bei multivariaten Signalen deutlich stärker als bei univariaten Signalen. Diese Komplexitätsreduktion hat Koch in [Koc08] für die Berechnung von Mittelwertfunktionen bei multivariaten Signalen ausgenutzt.

Zwei wichtige Fragen zu der Zerlegung eines Signals mit der adaptiven Wavelet-Approximation werden in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels behandelt. Sie betreffen einerseits das Vorzeichen der instantanen Frequenz einer Linearkombination von Wavelets auf einem Level j . Andererseits gilt es zu klären, wie die Modulationen in den Frequenzen, die bei den IMF-Komponenten der EMD vorkommen und entscheidend dazu beitragen, dass die EMD mit wenigen Komponenten auskommt, von der adaptiven Wavelet-Approximation verarbeitet werden können.

In diesem Kapitel werden durchgehend Funktionen, die auf dem Intervall $[0, 1]$ definiert sind, betrachtet. Eine Transformation des Intervalls $[0, 1]$ auf ein beliebiges Intervall $[a, b]$ ist mit einer linearen Transformation möglich.

6.2 Instantane Frequenz von Wavelets

Dieser Abschnitt untersucht die instantane Frequenz von Linearkombinationen von Wavelets gleichen Levels, die mit

$$g_j(t) := \mathbf{d}_j^\top \boldsymbol{\psi}_j(t) = \mathbf{d}_j^\top \mathbf{M}_{j,1}^\top \boldsymbol{\phi}_{j+1}(t), \quad t \in [0, 1], \quad (6.2.1)$$

bezeichnet werden, wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_j &:= (d_{j,1}, \dots, d_{j,\#\nabla_j})^\top \in \mathbb{R}^{\#\nabla_j} && \text{die Waveletkoeffizienten,} \\ \boldsymbol{\psi}_j &:= (\psi_{j,1}, \dots, \psi_{j,\#\nabla_j})^\top : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\#\nabla_j} && \text{die Wavelets,} \\ \boldsymbol{\phi}_{j+1} &:= (\phi_{j+1,1}, \dots, \phi_{j+1,\#\Delta_{j+1}})^\top : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\#\Delta_{j+1}} && \text{die Einzelskalenfunktionen und} \\ \mathbf{M}_{j,1} &\in \mathbb{R}^{(\#\Delta_{j+1}) \times (\#\nabla_j)} && \text{die Maskenmatrix} \end{aligned}$$

auf dem Level j bzw. auf dem Level $j+1$ sind. Seien die Einzelskalenfunktionen $\phi_{j+1,k}$ B-Splines der Ordnung $m \geq 2$ für die Knotenmenge $\theta := \theta(j+1) := \{\theta_i\}_{i=1}^{(\#\Delta_{j+1})+m} \subset [0, 1]$. Die Elemente der Knotenmenge erfüllen

$$0 = \theta_1 = \dots = \theta_m < \theta_{m+1} < \dots < \theta_{\#\Delta_{j+1}} < \theta_{\#\Delta_{j+1}+1} = \dots = \theta_{\#\Delta_{j+1}+m} = 1, \quad (6.2.2)$$

d. h. die Einzelskalenfunktionen sind als

$$\phi_{j+1,k} := B_{k,m} \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, \#\Delta_{j+1}\} \quad (6.2.3)$$

definiert. Mit

$$\mathbf{b}_{j+1,m} := (B_{1,m}, \dots, B_{\#\Delta_{j+1},m})^\top : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\#\Delta_{j+1}} \quad (6.2.4)$$

folgt für (6.2.1)

$$g_j(t) = \mathbf{d}_j^\top \mathbf{M}_{j,1}^\top \mathbf{b}_{j+1,m}(t). \quad (6.2.5)$$

Für die Bestimmung der instantanen Frequenz von g_{j-1} – das Level wird dekrementiert, um in (6.2.5) B-Spline-Einzelskalenfunktionen auf dem Level j zu erhalten – wird die Amplituden-Phasen-Darstellung des analytischen Signals $\mathcal{A}[g_{j-1}]$ von g_{j-1} benötigt, die nach der Definition 2.6.2 und der Bemerkung 2.7.3 als

$$\mathcal{A}[g_{j-1}](t) = a(t) e^{i\varphi(t)}$$

mit

$$a(t) = \sqrt{g_{j-1}^2(t) + \mathcal{H}[g_{j-1}]^2(t)} \quad \text{und} \quad \varphi(t) = \arctan\left(\frac{\mathcal{H}[g_{j-1}](t)}{g_{j-1}(t)}\right)$$

gegeben ist. Die instantane Frequenz von g_{j-1} ist mit Hilfe von (2.7.5) und (2.5.3) als

$$\omega(t) = \varphi'(t) = \frac{1}{a^2(t)} (g_{j-1}(t) \mathcal{H}[g'_{j-1}](t) - \mathcal{H}[g_{j-1}](t) g'_{j-1}(t))$$

gegeben. Der Term $1/a^2(t)$ ist größer 0 für alle t , für die er definiert ist, und deswegen ist für das Vorzeichen von $\omega(t)$ nur

$$\alpha(t) := g_{j-1}(t) \mathcal{H}[g'_{j-1}](t) - \mathcal{H}[g_{j-1}](t) g'_{j-1}(t) \quad (6.2.6)$$

relevant. Es werden noch die Definitionen

$$\mathbf{b}'_{j,m} := (B'_{1,m}, \dots, B'_{\#\Delta_j, m})^\top, \quad (6.2.7)$$

$$\mathcal{H}[\mathbf{b}_{j,m}] := (\mathcal{H}[B_{1,m}], \dots, \mathcal{H}[B_{\#\Delta_j, m}])^\top, \quad (6.2.8)$$

$$\mathcal{H}[\mathbf{b}'_{j,m}] := (\mathcal{H}[B'_{1,m}], \dots, \mathcal{H}[B'_{\#\Delta_j, m}])^\top \quad (6.2.9)$$

benötigt. Für beliebige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}^\top \mathbf{a})(\mathbf{v}^\top \mathbf{b}) - (\mathbf{v}^\top \mathbf{c})(\mathbf{v}^\top \mathbf{d}) &= (\mathbf{v}^\top \mathbf{a})(\mathbf{v}^\top \mathbf{b})^\top - (\mathbf{v}^\top \mathbf{c})(\mathbf{v}^\top \mathbf{d})^\top \\ &= (\mathbf{v}^\top \mathbf{a})(\mathbf{b}^\top \mathbf{v}) - (\mathbf{v}^\top \mathbf{c})(\mathbf{d}^\top \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}^\top (\mathbf{a}\mathbf{b}^\top) \mathbf{v} - \mathbf{v}^\top (\mathbf{c}\mathbf{d}^\top) \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}^\top (\mathbf{a}\mathbf{b}^\top - \mathbf{c}\mathbf{d}^\top) \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

wobei die unterste Zeile (6.2.10) eine quadratische Form ist. $\alpha(t)$ aus der Gleichung (6.2.6) kann daher nach Einsetzen von (6.2.5) in

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \left(\mathbf{d}_{j-1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{b}_{j,m}(t) \right) \left(\mathbf{d}_{j-1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathcal{H}[\mathbf{b}'_{j,m}](t) \right) \\ &\quad - \left(\mathbf{d}_{j-1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathcal{H}[\mathbf{b}_{j,m}](t) \right) \left(\mathbf{d}_{j-1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{b}'_{j,m}(t) \right) \\ &= \mathbf{d}_{j-1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \left(\mathbf{b}_{j,m}(t) \mathcal{H}[\mathbf{b}'_{j,m}]^\top(t) - \mathcal{H}[\mathbf{b}_{j,m}](t) \mathbf{b}'_{j,m}{}^\top(t) \right) \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{d}_{j-1} \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

umgeformt werden. In den Klammern der Gleichung (6.2.11) ist eine Funktion enthalten, die mit

$$\mathbf{A}(t) := \mathbf{b}_{j,m}(t) \mathcal{H}[\mathbf{b}'_{j,m}]^\top(t) - \mathcal{H}[\mathbf{b}_{j,m}](t) \mathbf{b}'_{j,m}{}^\top(t), \quad \mathbf{A} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{(\#\Delta_j) \times (\#\Delta_j)} \quad (6.2.12)$$

abgekürzt wird.

Lemma 6.2.1. Für die matrixwertige Funktion $\mathbf{A}(t)$ aus Gleichung (6.2.12) gilt

$$\mathbf{A}(t) = (t\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \mathbf{D} \left(\mathbf{b}(t) \mathcal{H}[\mathbf{b}]^\top(t) - \mathcal{H}[\mathbf{b}](t) \mathbf{b}^\top(t) \right) \mathbf{D}\mathbf{P}^\top(m-1) \quad (6.2.13)$$

mit

$$\mathbf{P} := \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\#\Delta_j) \times (\#\Delta_j+1)},$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &:= \begin{bmatrix} -\theta_1 & \theta_{1+m} & & & \\ & -\theta_2 & \theta_{2+m} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\theta_{\#\Delta_j} & \theta_{\#\Delta_j+m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\#\Delta_j) \times (\#\Delta_j+1)}, \\
 \mathbf{D} &:= \text{diag} \left((\theta_m - \theta_1)^{-1}, (\theta_{m+1} - \theta_2)^{-1}, \dots, (\theta_{\#\Delta_j+m-1} - \theta_{\#\Delta_j})^{-1} \right) \in \mathbb{R}^{(\#\Delta_j+1) \times (\#\Delta_j+1)}, \\
 \mathbf{b} &:= \left(B_{1,m-1}, \dots, B_{\#\Delta_j+1,m-1} \right)^\top : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\#\Delta_j+1}, \\
 \mathcal{H}[\mathbf{b}] &:= \left(\mathcal{H}[B_{1,m-1}], \dots, \mathcal{H}[B_{\#\Delta_j+1,m-1}] \right)^\top : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\#\Delta_j+1}
 \end{aligned}$$

und $B_{k,m-1}$, $k = 1, \dots, \#\Delta_j + 1$, sind B-Splines der Ordnung $m - 1$.

Beweis. Wegen der Rekursionsformel für B-Splines (3.3.3) lässt sich der Vektor mit B-Spline-Funktionen (6.2.4) als

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_{j,m}(t) &= \left(t \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\theta_1 & \theta_{1+m} & & & \\ & -\theta_2 & \theta_{2+m} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\theta_{\#\Delta_j} & \theta_{\#\Delta_j+m} \end{bmatrix} \right) \\
 &\quad \text{diag} \left((\theta_m - \theta_1)^{-1}, \dots, (\theta_{\#\Delta_j+m-1} - \theta_{\#\Delta_j})^{-1} \right) \begin{bmatrix} B_{1,m-1}(t) \\ \vdots \\ B_{\#\Delta_j+1,m-1}(t) \end{bmatrix} \\
 &= (\mathbf{tP} + \mathbf{Q})\mathbf{D}\mathbf{b}(t)
 \end{aligned}$$

ausdrücken. Analog wird (6.2.7), (6.2.8) und (6.2.9) mit Hilfe der Rekursionsformeln (3.3.4), (3.3.5) und (3.3.7) in

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}'_{j,m}(t) &= (m-1)\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{b}(t), \\
 \mathcal{H}[\mathbf{b}_{j,m}](t) &= (\mathbf{tP} + \mathbf{Q})\mathbf{D}\mathcal{H}[\mathbf{b}](t), \\
 \mathcal{H}[\mathbf{b}'_{j,m}](t) &= (m-1)\mathbf{P}\mathbf{D}\mathcal{H}[\mathbf{b}](t)
 \end{aligned}$$

umgeschrieben. Einsetzen in $\mathbf{A}(t)$ ergibt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(t) &= \left((\mathbf{tP} + \mathbf{Q})\mathbf{D}\mathbf{b}(t) \right) \left((m-1)\mathbf{P}\mathbf{D}\mathcal{H}[\mathbf{b}](t) \right)^\top - \left((\mathbf{tP} + \mathbf{Q})\mathbf{D}\mathcal{H}[\mathbf{b}](t) \right) \left((m-1)\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{b}(t) \right)^\top \\
 &= (\mathbf{tP} + \mathbf{Q})\mathbf{D} \left(\mathbf{b}(t)\mathcal{H}[\mathbf{b}]^\top(t) - \mathcal{H}[\mathbf{b}](t)\mathbf{b}^\top(t) \right) \mathbf{D}\mathbf{P}^\top(m-1). \quad \square
 \end{aligned}$$

Lemma 6.2.2. Die matrixwertige Funktion

$$\mathbf{S}(t) := \mathbf{b}(t)\mathcal{H}[\mathbf{b}]^\top(t) - \mathcal{H}[\mathbf{b}](t)\mathbf{b}^\top(t), \quad \mathbf{S}(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{(\#\Delta_j+1) \times (\#\Delta_j+1)} \quad (6.2.14)$$

ist antisymmetrisch, d. h. es gilt

$$\mathbf{S}(t) = -(\mathbf{S}(t))^\top.$$

Für ein $t \in [0, 1]$ existiert ein $\mu \in \{1, \dots, \#\Delta_j + m\}$, sodass $t \in [\theta_\mu, \theta_{\mu+1})$ und

$$\mathbf{S}(t) = (s_{i,l})_{i,l=1,\dots,\#\Delta_j+1}$$

besitzt die Struktur

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & s_{1,i_1} & \cdots & s_{1,i_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s_{i_1-1,i_1} & \cdots & s_{i_1-1,i_2} & 0 & \cdots & 0 \\ s_{i_1,1} & \cdots & s_{i_1,i_1-1} & 0 & s_{i_1,i_1+1} & \cdots & \cdots & \cdots & s_{i_1,\#\Delta_j+1} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ s_{i_2,1} & \cdots & \cdots & \cdots & s_{i_2,i_2-1} & 0 & s_{i_2,i_2+1} & \cdots & s_{i_2,\#\Delta_j+1} \\ 0 & \cdots & 0 & s_{i_2+1,i_1} & \cdots & s_{i_2+1,i_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s_{\#\Delta_j+1,i_1} & \cdots & s_{\#\Delta_j+1,i_2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.2.15)$$

mit $i_1 := \mu - m + 2$ und $i_2 := \mu$.

Beweis. Sei $\mathbf{S}(t)$ definiert wie in (6.2.14), dann ist $\mathbf{S}(t)$ antisymmetrisch wegen

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}(t))^\top &= (\mathbf{b}(t) \mathcal{H}[\mathbf{b}]^\top(t) - \mathcal{H}[\mathbf{b}](t) \mathbf{b}^\top(t))^\top \\ &= (\mathbf{b}(t) \mathcal{H}[\mathbf{b}]^\top(t))^\top - (\mathcal{H}[\mathbf{b}](t) \mathbf{b}^\top(t))^\top \\ &= \mathcal{H}[\mathbf{b}](t) \mathbf{b}(t)^\top - \mathbf{b}(t) \mathcal{H}[\mathbf{b}]^\top(t) \\ &= -\mathbf{S}(t). \end{aligned}$$

Aus der Antisymmetrie folgt sofort, dass alle Diagonalelemente von $\mathbf{S}(t)$ gleich null sind. Im Allgemeinen hat die Hilbert-Transformation einer Funktion einen globalen Träger, deswegen sind auch alle Einträge des Vektors $\mathcal{H}[\mathbf{b}](t)$ im Allgemeinen ungleich null. Dagegen haben B-Splines einen kompakten Träger. Für ein beliebiges aber festes $t \in [0, 1]$ existiert ein $\mu \in \{1, \dots, \#\Delta_j + m\}$, sodass $t \in [\theta_\mu, \theta_{\mu+1})$, und für dieses t gilt

$$B_{k,m-1}(t) \neq 0 \quad \text{für} \quad k = \mu - m + 2, \dots, \mu.$$

Also haben nur diese B-Splines im Vektor $\mathbf{b}(t)$ nichtverschwindende Funktionswerte. Insgesamt erhält man die Struktur (6.2.15) von $\mathbf{S}(t)$. $\square$

Satz 6.2.3. Das Vorzeichen der instantanen Frequenz $\omega(t)$ von einer Linearkombination von Wavelets gleichen Levels $g_{j-1}(t)$ wie in (6.2.1) wird von der quadratischen Form

$$\alpha(t) = (m-1) \mathbf{d}_{j-1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{S}(t) \mathbf{D} \mathbf{P}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{d}_{j-1} \quad (6.2.16)$$

bestimmt, wobei die Matrizen $\mathbf{D}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ wie im Lemma 6.2.1 und $\mathbf{S}(t)$ wie in der Gleichung (6.2.14) definiert ist.

Beweis. $A(t)$ aus der Gleichung (6.2.13) wird in die quadratische Form $\alpha(t)$ aus der Gleichung (6.2.11) eingesetzt

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \mathbf{d}_{j-1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top (t\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \mathbf{D}\mathbf{S}(t)\mathbf{D}\mathbf{P}^\top (m-1) \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{d}_{j-1} \\ &= t(m-1) \left(\mathbf{d}_{j-1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{P}\mathbf{D} \right) \mathbf{S}(t) \left(\mathbf{D}\mathbf{P}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{d}_{j-1} \right) \\ &\quad + (m-1) \mathbf{d}_{j-1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{S}(t)\mathbf{D}\mathbf{P}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{d}_{j-1}.\end{aligned}\tag{6.2.17}$$

Für eine beliebige quadratische Form mit einer antisymmetrischen Matrix $\mathbf{S}$ gilt

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{S} \mathbf{x} = 0,$$

wegen

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{S} \mathbf{x} = (\mathbf{x}^\top \mathbf{S} \mathbf{x})^\top = -\mathbf{x}^\top \mathbf{S} \mathbf{x}$$

(siehe auch [Bro05] für Eigenschaften antisymmetrischer Matrizen). Der erste Summand in (6.2.17) ist somit gleich null, da $\mathbf{S}(t)$ nach Lemma 6.2.2 antisymmetrisch ist, und es folgt die Behauptung des Satzes. $\square$

Sei die Ordnung der B-Splines von nun an als $m = 2$ gewählt, d. h. die B-Splines sind stetige und stückweise lineare Funktionen. Seien die Stützstellen, deren Anzahl $\#\Delta_j + m - 2(m-1)$ beträgt und aus denen die Knotenfolge $\theta = \theta(j)$ gewonnen wird, mit dem Abstand $h > 0$ äquidistant verteilt, wobei h als

$$h := 2^{-(\#\Delta_j + m - 2(m-1) - 1)} = 2^{-(\#\Delta_j - m + 1)} = 2^{-(\#\Delta_j - 1)}$$

definiert ist und

$$j-1 \geq j_0 \quad \text{mit} \quad j_0 := 2$$

gilt, das

$$j \geq 3$$

zur Folge hat. Im folgenden Satz wird eine Aussage über das Vorzeichen der instantanen Frequenz eines einzelnen Wavelets bewiesen. Darin wird der Beweis einer Ungleichung benötigt, die sich bislang nur numerisch bis Level $J = 9$ verifizieren ließ. Man beachte, dass $J = 9$ das maximale Level bezeichnet, für das der Wert der Gitterweite h in doppelter Genauigkeit (double precision) auf dem Rechner dargestellt werden kann.

Satz 6.2.4. *Für die instantane Frequenz eines einzelnen Wavelets, das nicht am Rand liegt,*

$$\psi_{j-1,k}(t) \quad \text{mit} \quad j_0 + 1 \leq j \leq J, \quad k \in \{2, \dots, \#\nabla_{j-1} - 1\}$$

gilt

$$\omega(t) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

$$\alpha(t) = \mathbf{d}_{j-1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{D} \mathbf{P}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{d}_{j-1} \quad (6.2.18)$$
$$\mathbf{d}_{j-1} = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow k}{1}, 0, \dots, 0)^\top = \mathbf{e}_k,$$
$$\mathbf{M}_{j-1,1} = \sqrt{\frac{2^j}{72}} \begin{bmatrix} -11.022704 & & & & & & & & & \\ & 10.104145 & 1 & & & & & & & \\ & -5.511352 & -6 & & & & & & & \\ & 0.918559 & 10 & & & & & & & \\ & & -6 & \cdot & & & & & & \\ & & 1 & & \cdot & & 1 & & & \\ & & & & & \cdot & -6 & & & \\ & & & & & & 10 & 0.918559 & & \\ & & & & & & -6 & -5.511352 & & \\ & & & & & & 1 & 10.104145 & & \\ & & & & & & & -11.022704 & & \end{bmatrix}$$
$$\eta := \eta(k) := 2(k - 1)$$
$$\mathbf{M}_{j-1,1}\mathbf{d}_{j-1} = \sqrt{\frac{2^j}{72}}(0, \dots, 0, \underset{\uparrow n}{1}, -6, 10, -6, 1, 0, \dots, 0)^\top$$

und weiterhin

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{d}_{j-1} &= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{2^j}{72}} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -6 \\ 10 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \sqrt{\frac{2^j}{72}} (0, \dots, 0, \underset{\uparrow \eta}{1}, -7, 16, -16, 7, -1, 0, \dots, 0)^\top,
 \end{aligned}$$

was mit

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{d}_{j-1} =: \sqrt{\frac{2^j}{72}} \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{\#\Delta_j+1}$$

abgekürzt wird. Für das linke Matrix-Vektor-Produkt der Gleichung (6.2.18) gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}_{j-1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{Q} &= \sqrt{\frac{2^j}{72}} (0, \dots, 0, \underset{\uparrow \eta}{1}, -6, 10, -6, 1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} -\theta_1 & \theta_{1+m} & & & \\ & -\theta_2 & \theta_{2+m} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\theta_{\#\Delta_j} & \theta_{\#\Delta_j+m} \end{bmatrix} \\
 &= \sqrt{\frac{2^j}{72}} \\
 &\quad \cdot (0, \dots, 0, -\theta_\eta, \theta_{\eta+2} + 6\theta_{\eta+1}, -6\theta_{\eta+3} - 10\theta_{\eta+2}, 10\theta_{\eta+4} + 6\theta_{\eta+3}, -6\theta_{\eta+5} - \theta_{\eta+4}, \theta_{\eta+6}, 0, \dots, 0),
 \end{aligned}$$

was mit

$$\mathbf{d}_{j-1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{Q} = \sqrt{\frac{2^j}{72}} \mathbf{l}^\top \in \mathbb{R}^{\#\Delta_j+1} \quad (6.2.19)$$

abgekürzt wird. Die Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ lässt sich wegen äquidistanter Stützstellen und (6.2.2) zu

$$\mathbf{D} = h \operatorname{diag}(0, 1, \dots, 1, 0) =: h\widetilde{\mathbf{D}}$$

vereinfachen. Da sowohl die ersten als auch die letzten Einträge der Vektoren $\mathbf{l}^\top$ und $\mathbf{r}$ gleich null für alle $k \in \{2, \dots, \#\nabla_{j-1} - 1\}$ sind, gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{l}^\top \widetilde{\mathbf{D}} &= \mathbf{l}^\top, \\
 \widetilde{\mathbf{D}} \mathbf{r} &= \mathbf{r}.
 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt für $\alpha(t)$ aus Gleichung (6.2.18)

$$\alpha(t) = \frac{2^j h^2}{72} \mathbf{l}^\top \mathbf{S}(t) \mathbf{r}.$$

Da $\frac{2^j h^2}{72}$ irrelevant für das Vorzeichen von $\alpha(t)$ ist, ist für die Behauptung des Satzes die Ungleichung

$$\tilde{\alpha}(t) := \mathbf{l}^\top \mathbf{S}(t) \mathbf{r} \geq 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \quad (6.2.20)$$

zu zeigen.

Für ein $t \in [0, 1]$ existiert ein $\mu \in \{1, \dots, \#\Delta_j + 2\}$, sodass $t \in [\theta_\mu, \theta_{\mu+1})$ liegt und $\mathbf{S}(t)$ hat dann nach Lemma 6.2.2 die Struktur

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & s_{1,\mu}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s_{\mu-1,\mu}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ s_{\mu,1}(t) & \cdots & s_{\mu,\mu-1}(t) & 0 & s_{\mu,\mu+1}(t) & \cdots & s_{\mu,\#\Delta_j+1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & s_{\mu+1,\mu}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s_{\#\Delta_j+1,\mu}(t) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Falls t nicht im Träger von $\psi_{j-1,k}$ liegt, also falls

$$\mu < \eta \quad \text{oder} \quad \mu > \eta + 5$$

gilt, dann verschwindet $\tilde{\alpha}(t)$, d. h.

$$\tilde{\alpha}(t) = \mathbf{l}^\top \mathbf{S}(t) \mathbf{r} = 0 \quad \text{für alle } t \in [0, \theta_\eta) \cup [\theta_{\eta+6}, 1],$$

da

$$\mathbf{S}(t) \mathbf{r} = \left(0, \dots, 0, \underset{\uparrow \mu}{*}, 0, \dots, 0 \right)^\top$$

gilt und der Vektor $\mathbf{l}$ nur für die Einträge mit den Indizes $\eta, \eta+1, \dots, \eta+5$ von null verschiedene Einträge aufweist. Für den umgekehrten Fall

$$\eta \leq \mu \leq \eta + 5$$

gilt

$$\mathbf{S}(t) \mathbf{r} = \mathbf{S}(t) \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{\#\Delta_j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_\mu s_{1,\mu}(t) \\ \vdots \\ r_\mu s_{\mu-1,\mu}(t) \\ r_\eta s_{\mu,\eta}(t) + \dots + r_{\eta+5} s_{\mu,\eta+5}(t) \\ r_\mu s_{\mu+1,\mu}(t) \\ \vdots \\ r_\mu s_{\#\Delta_j+1,\mu}(t) \end{bmatrix},$$

wobei $s_{\mu,\mu}(t) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$ ist, und es folgt mit ausnutzen der Antisymmetrie von $S(t)$ aus Lemma 6.2.2

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}(t) &= \mathbf{l}^\top \mathbf{S}(t) \mathbf{r} = \begin{bmatrix} l_1 & \cdots & l_{\#\Delta_j+1} \end{bmatrix} \mathbf{S}(t) \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{\#\Delta_j+1} \end{bmatrix} \\ &= l_\eta r_\mu s_{\eta,\mu}(t) + \dots + l_{\mu-1} r_\mu s_{\mu-1,\mu}(t) + l_\mu (r_\eta s_{\mu,\eta}(t) + \dots + r_{\eta+5} s_{\mu,\eta+5}(t)) \\ &\quad + l_{\mu+1} r_\mu s_{\mu+1,\mu}(t) + \dots + l_{\eta+5} r_\mu s_{\eta+5,\mu}(t) \\ &= -l_\eta r_\mu s_{\mu,\eta}(t) - \dots - l_{\mu-1} r_\mu s_{\mu,\mu-1}(t) + l_\mu (r_\eta s_{\mu,\eta}(t) + \dots + r_{\eta+5} s_{\mu,\eta+5}(t)) \\ &\quad - l_{\mu+1} r_\mu s_{\mu,\mu+1}(t) - \dots - l_{\eta+5} r_\mu s_{\mu,\eta+5}(t).\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wird in die kompaktere Schreibweise

$$\widetilde{\alpha}(t) = \sum_{i=\eta}^{\eta+5} s_{\mu,i}(t) (l_\mu r_i - l_i r_\mu) \quad (6.2.21)$$

gebracht. Die Elemente l_i des Vektors $\mathbf{l}^\top$ lassen sich nach dessen Definition in (6.2.19) als

$$l_i = \theta_{i+1} \sum_{n=\eta}^{i-1} r_n - \theta_i \sum_{n=\eta}^i r_n \quad \text{für } i = \eta, \dots, \eta + 5$$

schreiben, wobei $\sum_{n=\eta}^{\eta-1} r_n = 0$ gesetzt wird. Damit kann die Klammer der rechten Seite von (6.2.21) zu

$$\begin{aligned}l_\mu r_i - l_i r_\mu &= \left(\theta_{\mu+1} \sum_{n=\eta}^{\mu-1} r_n - \theta_\mu \sum_{n=\eta}^\mu r_n \right) r_i - \left(\theta_{i+1} \sum_{n=\eta}^{i-1} r_n - \theta_i \sum_{n=\eta}^i r_n \right) r_\mu \\ &= r_i \theta_{\mu+1} \sum_{n=\eta}^{\mu-1} r_n - r_i \theta_\mu \sum_{n=\eta}^\mu r_n - r_\mu \theta_{i+1} \sum_{n=\eta}^{i-1} r_n + r_\mu \theta_i \sum_{n=\eta}^i r_n \\ &= r_i \left(\sum_{n=\eta}^{\mu-1} r_n \right) (\theta_{\mu+1} - \theta_\mu) - r_i \theta_\mu r_\mu - r_\mu \left(\sum_{n=\eta}^{i-1} r_n \right) (\theta_{i+1} - \theta_i) + r_\mu \theta_i r_i \\ &= r_\mu r_i (\theta_i - \theta_\mu) + r_i \left(\sum_{n=\eta}^{\mu-1} r_n \right) (\theta_{\mu+1} - \theta_\mu) + (-r_\mu) \left(\sum_{n=\eta}^{i-1} r_n \right) (\theta_{i+1} - \theta_i)\end{aligned}$$

umgeformt werden. Da äquidistante Stützstellen vorausgesetzt werden, gilt mit den Definitionen

$$m_1(i) := r_\mu r_i, \quad m_2(i) := r_i \left(\sum_{n=\eta}^{\mu-1} r_n \right) \quad \text{und} \quad m_3(i) := (-r_\mu) \left(\sum_{n=\eta}^{i-1} r_n \right) \quad (6.2.22)$$

sogar

$$l_\mu r_i - l_i r_\mu = h(m_1(i)(i - \mu) + m_2(i) + m_3(i))$$

Tabelle 6.1: Werte des Tripels $(m_1(i), m_2(i), m_3(i))$, berechnet nach (6.2.22)

	μ					
	η	$\eta + 1$	$\eta + 2$	$\eta + 3$	$\eta + 4$	$\eta + 5$
η		(-7, 1, 0)	(16, -6, 0)	(-16, 10, 0)	(7, -6, 0)	(-1, 1, 0)
$\eta + 1$	(-7, 0, -1)		(-112, 42, -16)	(112, -70, 16)	(-49, 42, -7)	(7, -7, 1)
$\eta + 2$	(16, 0, 6)	(-112, 16, -42)		(-256, 160, -96)	(112, -96, 42)	(-16, 16, -6)
$\eta + 3$	(-16, 0, -10)	(112, -16, 70)	(-256, 96, -160)		(-112, 96, -70)	(16, -16, 10)
$\eta + 4$	(7, 0, 6)	(-49, 7, -42)	(112, -42, 96)	(-112, 70, -96)		(-7, 7, -6)
$\eta + 5$	(-1, 0, -1)	(7, -1, 7)	(-16, 6, -16)	(16, -10, 16)	(-7, 6, -7)	

und Behauptung (6.2.20) kann in die Ungleichung

$$\sum_{i=\eta}^{\eta+5} s_{\mu,i}(t) (m_1(i)(i-\mu) + m_2(i) + m_3(i)) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in [\theta_\mu, \theta_{\mu+1}) \text{ mit } \mu = \eta, \dots, \eta+5 \quad (6.2.23)$$

überführt werden. In der nun zu zeigenden Ungleichung (6.2.23) wurde der Faktor h weggelassen, weil $h > 0$ ist und das Vorzeichen nicht beeinflusst.

Zunächst werden die Werte von $m_1(i)$, $m_2(i)$ und $m_3(i)$ für $i, \mu = \eta, \dots, \eta + 5$ berechnet und in Tabelle 6.1 angegeben. Anschließend wird für die 6 Fälle $\mu = \eta, \dots, \eta + 5$ die Ungleichung (6.2.23) nachgewiesen. Dafür werden noch die Funktionen $s_{\mu,i}$ benötigt, die wegen (6.2.14), (3.3.6) und $t \in [\theta_\mu, \theta_{\mu+1})$ als

$$\begin{aligned} i < \mu: \quad s_{\mu,i}(t) &= B_{\mu,1}(t) \mathcal{H}[B_{i,1}](t) - \mathcal{H}[B_{\mu,1}](t) B_{i,1}(t) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{t - \theta_i}{t - \theta_{i+1}} \right| > 0, \\ i = \mu: \quad s_{\mu,\mu}(t) &= 0, \\ i > \mu: \quad s_{\mu,i}(t) &= B_{\mu,1}(t) \mathcal{H}[B_{i,1}](t) - \mathcal{H}[B_{\mu,1}](t) B_{i,1}(t) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{t - \theta_i}{t - \theta_{i+1}} \right| < 0 \end{aligned}$$

gegeben sind. Es wurde der kompakte Träger der stückweise konstanten B-Splines erster Ordnung ausgenutzt, wonach

$$B_{\mu,1}(t) = 1 \quad \text{und} \quad B_{i,1}(t) = 0$$

für $t \in [\theta_\mu, \theta_{\mu+1})$ und $i \neq \mu$ gilt.

1. Fall: $\mu = \eta$

Nach Behauptung (6.2.23) ist zu zeigen, dass für alle $t \in [\theta_\eta, \theta_{\eta+1})$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=\eta}^{\eta+5} s_{\eta,i}(t) (m_1(i)(i-\eta) + m_2(i) + m_3(i)) \\ &= s_{\eta,\eta+1}(t) (-7(\eta+1-\eta) - 1) \\ &\quad + s_{\eta,\eta+2}(t) (16(\eta+2-\eta) + 6) + s_{\eta,\eta+3}(t) (-16(\eta+3-\eta) - 10) \\ &\quad + s_{\eta,\eta+4}(t) (7(\eta+4-\eta) + 6) + s_{\eta,\eta+5}(t) (-1(\eta+5-\eta) - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -8s_{\eta,\eta+1}(t) + 38s_{\eta,\eta+2}(t) - 58s_{\eta,\eta+3}(t) + 34s_{\eta,\eta+4}(t) - 6s_{\eta,\eta+5}(t) \\
 &= -\frac{8}{\pi} \ln \left| \frac{t - \theta_{\eta+1}}{t - \theta_{\eta+2}} \right| + \frac{38}{\pi} \ln \left| \frac{t - \theta_{\eta+2}}{t - \theta_{\eta+3}} \right| - \frac{58}{\pi} \ln \left| \frac{t - \theta_{\eta+3}}{t - \theta_{\eta+4}} \right| + \frac{34}{\pi} \ln \left| \frac{t - \theta_{\eta+4}}{t - \theta_{\eta+5}} \right| - \frac{6}{\pi} \ln \left| \frac{t - \theta_{\eta+5}}{t - \theta_{\eta+6}} \right| \\
 &= \frac{1}{\pi} \ln \left(\left| \frac{t - \theta_{\eta+1}}{t - \theta_{\eta+2}} \right|^{-8} \left| \frac{t - \theta_{\eta+2}}{t - \theta_{\eta+3}} \right|^{38} \left| \frac{t - \theta_{\eta+3}}{t - \theta_{\eta+4}} \right|^{-58} \left| \frac{t - \theta_{\eta+4}}{t - \theta_{\eta+5}} \right|^{34} \left| \frac{t - \theta_{\eta+5}}{t - \theta_{\eta+6}} \right|^{-6} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{|t - \theta_{\eta+2}|^{46} |t - \theta_{\eta+4}|^{92} |t - \theta_{\eta+6}|^6}{|t - \theta_{\eta+1}|^8 |t - \theta_{\eta+3}|^{96} |t - \theta_{\eta+5}|^{40}} \right)
 \end{aligned}$$

gilt, was dann vorliegt, falls

$$|t - \theta_{\eta+2}|^{46} |t - \theta_{\eta+4}|^{92} |t - \theta_{\eta+6}|^6 - |t - \theta_{\eta+1}|^8 |t - \theta_{\eta+3}|^{96} |t - \theta_{\eta+5}|^{40} \geq 0 \quad (6.2.24)$$

für alle $t \in [\theta_\eta, \theta_{\eta+1})$ gilt. Um das zu zeigen, wird $t := \theta_\eta + x$ gesetzt, wobei x aus dem Intervall $[0, h)$ ist, und die beiden Funktionen

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= |x - 2h|^{46} |x - 4h|^{92} |x - 6h|^6, \\
 g(x) &:= |x - h|^8 |x - 3h|^{96} |x - 5h|^{40}
 \end{aligned}$$

werden definiert. Dann lässt sich die Ungleichung (6.2.24) und damit die zu zeigende Behauptung als

$$f(x) - g(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in [0, h) \quad (6.2.25)$$

formulieren. Diese Ungleichung soll numerisch für die Levels $j_0 + 1 \leq j \leq J$ nachgewiesen werden. In Abbildung 6.1 ist der Werteverlauf von $f(x) - g(x)$ für das Level $j = 3$ zu sehen. Es ist zu erkennen, dass bereits bei diesem niedrigen Level die Werte nahe der Grenze $\sim 10^{-307}$ für darstellbare Zahlen bei doppelter Genauigkeit (double precision) liegen. Die Definitionen von f und g werden deshalb zu

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= |x - 2h|^{46/96} |x - 4h|^{92/96} |x - 6h|^{6/96} = |x - 2h|^{23/48} |x - 4h|^{23/24} |x - 6h|^{1/16}, \\
 g(x) &:= |x - h|^{8/96} |x - 3h|^{96/96} |x - 5h|^{40/96} = |x - h|^{1/12} |x - 3h| |x - 5h|^{5/12}
 \end{aligned}$$

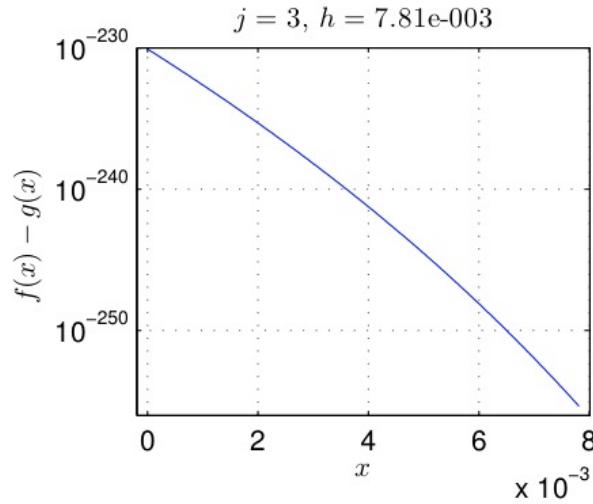
modifiziert und für die neuen Definitionen muss nach wie vor die Ungleichung (6.2.25) nachgewiesen werden. Das geschieht numerisch mit den in Abbildung 6.2 dargestellten Ergebnissen. Anhand der Graphen in dieser Abbildung mit logarithmisch skaliert vertikaler Achse ist zu erkennen, dass die Differenz $f(x) - g(x)$ für alle Werte von $x \in [0, h)$ größer als null ist. Damit ist die Ungleichung (6.2.25) für den ersten Fall gezeigt.

Die Beweise der übrigen Fälle verlaufen analog zum ersten Fall und werden deshalb in einer knappen Form angegeben.

2. Fall: $\mu = \eta + 1$

Nach der Behauptung (6.2.23) ist zu zeigen, dass für alle $t \in [\theta_{\eta+1}, \theta_{\eta+2})$

$$0 \leq \sum_{i=\eta}^{\eta+5} s_{\eta+1,i}(t) (m_1(i)(i - \eta - 1) + m_2(i) + m_3(i))$$


 Abbildung 6.1: Werte von $f(x) - g(x)$ für das Level $j = 3$

$$\begin{aligned}
 &= s_{\eta+1,\eta}(t)(-7(\eta - \eta - 1) + 1) \\
 &\quad + s_{\eta+1,\eta+2}(t)(-112(\eta + 2 - \eta - 1) + 16 - 42) + s_{\eta+1,\eta+3}(t)(112(\eta + 3 - \eta - 1) - 16 + 70) \\
 &\quad + s_{\eta+1,\eta+4}(t)(-49(\eta + 4 - \eta - 1) + 7 - 42) + s_{\eta+1,\eta+5}(t)(7(\eta + 5 - \eta - 1) - 1 + 7) \\
 &= 8s_{\eta+1,\eta}(t) - 138s_{\eta+1,\eta+2}(t) + 278s_{\eta+1,\eta+3}(t) - 182s_{\eta+1,\eta+4}(t) + 34s_{\eta+1,\eta+5}(t) \\
 &= \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{|t - \theta_\eta|^8 |t - \theta_{\eta+3}|^{416} |t - \theta_{\eta+5}|^{216}}{|t - \theta_{\eta+1}|^8 |t - \theta_{\eta+2}|^{138} |t - \theta_{\eta+4}|^{460} |t - \theta_{\eta+6}|^{34}} \right)
 \end{aligned}$$

gilt. Sei $t := \theta_{\eta+1} + x$ mit $x \in [0, h)$. Die beiden Funktionen

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= |x + h|^{2/115} |x - 2h|^{104/115} |x - 4h|^{54/115}, \\
 g(x) &:= |x|^{2/115} |x - h|^{3/10} |x - 3h| |x - 5h|^{17/230}
 \end{aligned}$$

werden definiert und es wird in Abbildung 6.3 numerisch für die Levels $3 \leq j \leq 9$ gezeigt, dass die Ungleichung

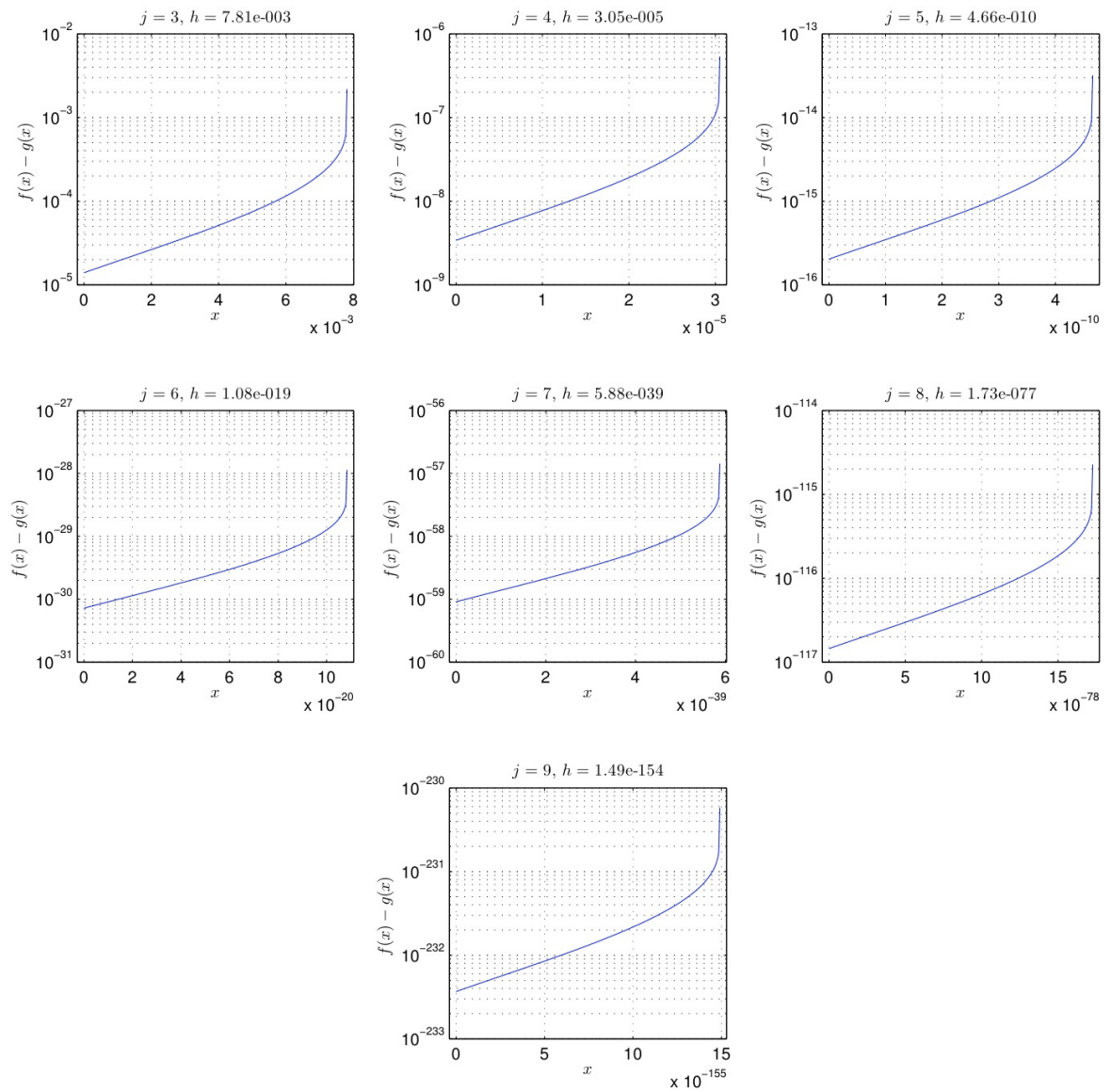
$$f(x) - g(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in [0, h)$$

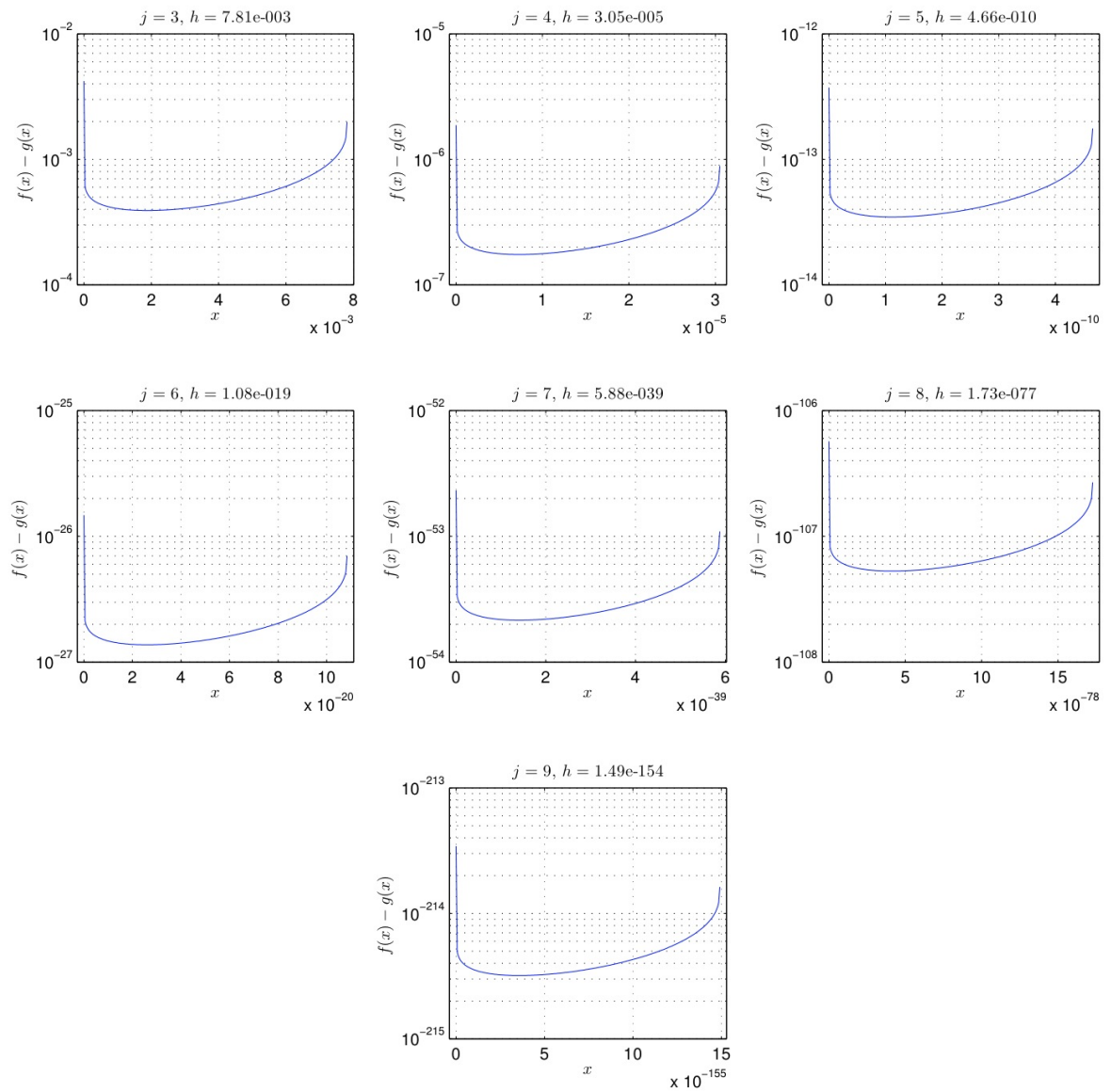
gilt.

3. Fall: $\mu = \eta + 2$

Nach der Behauptung (6.2.23) ist zu zeigen, dass für alle $t \in [\theta_{\eta+2}, \theta_{\eta+3})$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sum_{i=\eta}^{\eta+5} s_{\eta+2,i}(t)(m_1(i)(i - \eta - 2) + m_2(i) + m_3(i)) \\
 &= s_{\eta+2,\eta}(t)(16(\eta - \eta - 2) - 6) + s_{\eta+2,\eta+1}(t)(-112(\eta + 1 - \eta - 2) + 42 - 16) \\
 &\quad + s_{\eta+2,\eta+3}(t)(-256(\eta + 3 - \eta - 2) + 96 - 160) \\
 &\quad + s_{\eta+2,\eta+4}(t)(112(\eta + 4 - \eta - 2) - 42 + 96) + s_{\eta+2,\eta+5}(t)(-16(\eta + 5 - \eta - 2) + 6 - 16)
 \end{aligned}$$


 Abbildung 6.2: Zum 1. Fall: Werte von $f(x) - g(x)$ für die Levels $3 \leq j \leq 9$


 Abbildung 6.3: Zum 2. Fall: Werte von $f(x) - g(x)$ für die Levels $3 \leq j \leq 9$

$$\begin{aligned}
 &= -38s_{\eta+2,\eta}(t) + 138s_{\eta+2,\eta+1}(t) - 320s_{\eta+2,\eta+3}(t) + 278s_{\eta+2,\eta+4}(t) - 58s_{\eta+2,\eta+5}(t) \\
 &= \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{|t - \theta_{\eta+1}|^{176} |t - \theta_{\eta+4}|^{598} |t - \theta_{\eta+6}|^{58}}{|t - \theta_{\eta}|^{38} |t - \theta_{\eta+2}|^{138} |t - \theta_{\eta+3}|^{320} |t - \theta_{\eta+5}|^{336}} \right)
 \end{aligned}$$

gilt. Sei $t := \theta_{\eta+2} + x$ mit $x \in [0, h)$. Die beiden Funktionen

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= |x + h|^{88/299} |x - 2h| |x - 4h|^{29/299}, \\
 g(x) &:= |x + 2h|^{19/299} |x|^{3/13} |x - h|^{160/299} |x - 3h|^{168/299}
 \end{aligned}$$

werden definiert und es wird in Abbildung 6.4 numerisch für die Levels $3 \leq j \leq 9$ gezeigt, dass die Ungleichung

$$f(x) - g(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in [0, h)$$

gilt.

4. Fall: $\mu = \eta + 3$

Nach der Behauptung (6.2.23) ist zu zeigen, dass für alle $t \in [\theta_{\eta+3}, \theta_{\eta+4})$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sum_{i=\eta}^{\eta+5} s_{\eta+3,i}(t) (m_1(i)(i - \eta - 3) + m_2(i) + m_3(i)) \\
 &= s_{\eta+3,\eta}(t) (-16(\eta - \eta - 3) + 10) + s_{\eta+3,\eta+1}(t) (112(\eta + 1 - \eta - 3) - 70 + 16) \\
 &\quad + s_{\eta+3,\eta+2}(t) (-256(\eta + 2 - \eta - 3) + 160 - 96) \\
 &\quad + s_{\eta+3,\eta+4}(t) (-112(\eta + 4 - \eta - 3) + 70 - 96) + s_{\eta+3,\eta+5}(t) (16(\eta + 5 - \eta - 3) - 10 + 16) \\
 &= 58s_{\eta+3,\eta}(t) - 278s_{\eta+3,\eta+1}(t) + 320s_{\eta+3,\eta+2}(t) - 138s_{\eta+3,\eta+4}(t) + 38s_{\eta+3,\eta+5}(t) \\
 &= \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{|t - \theta_{\eta}|^{58} |t - \theta_{\eta+2}|^{598} |t - \theta_{\eta+5}|^{176}}{|t - \theta_{\eta+1}|^{336} |t - \theta_{\eta+3}|^{320} |t - \theta_{\eta+4}|^{138} |t - \theta_{\eta+6}|^{38}} \right)
 \end{aligned}$$

gilt. Sei $t := \theta_{\eta+3} + x$ mit $x \in [0, h)$. Die beiden Funktionen

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= |x + 3h|^{29/299} |x + h| |x - 2h|^{88/299}, \\
 g(x) &:= |x + 2h|^{168/299} |x|^{160/299} |x - h|^{3/13} |x - 3h|^{19/299}
 \end{aligned}$$

werden definiert und es wird in Abbildung 6.5 numerisch für die Levels $3 \leq j \leq 9$ gezeigt, dass die Ungleichung

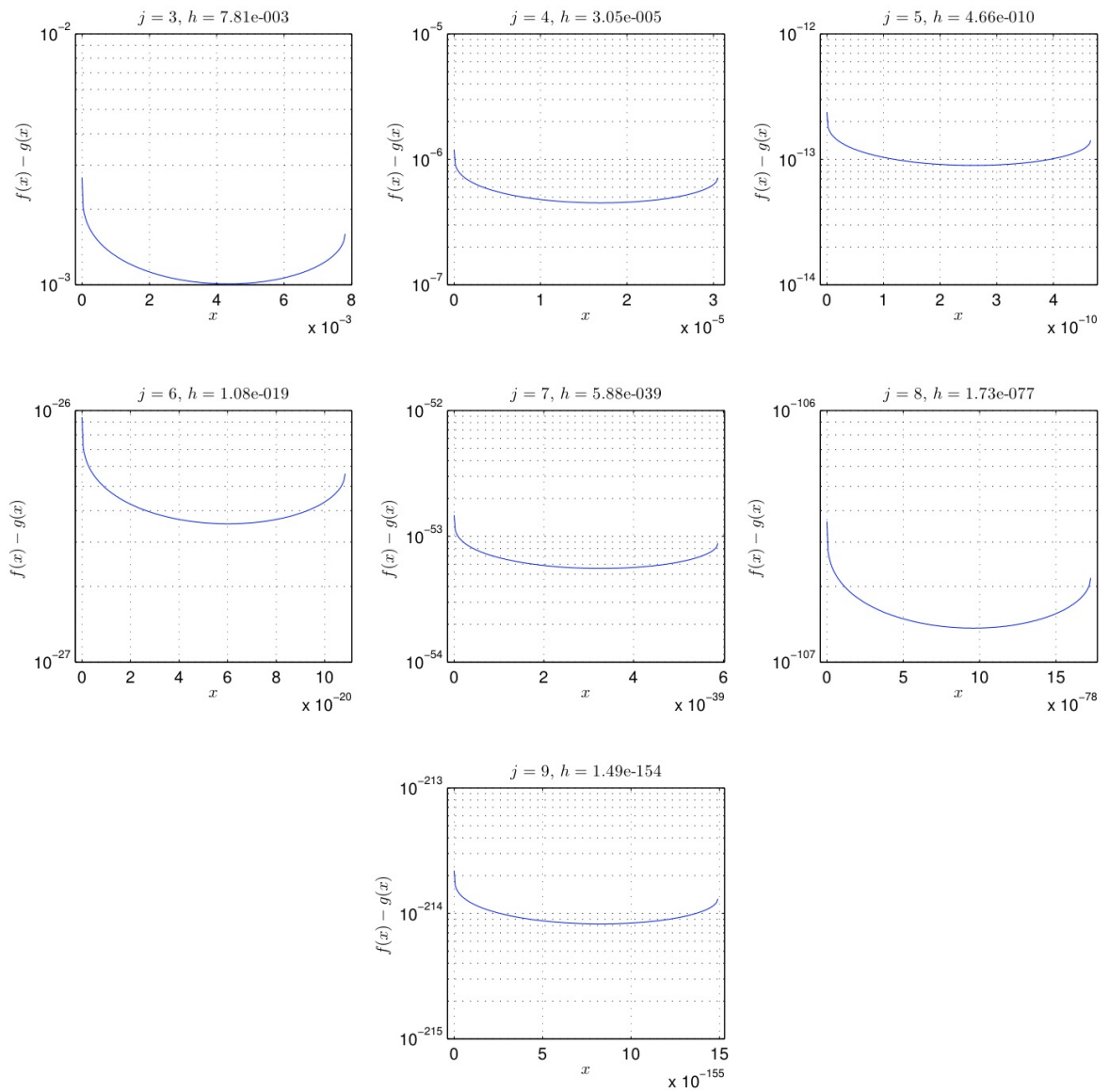
$$f(x) - g(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in [0, h)$$

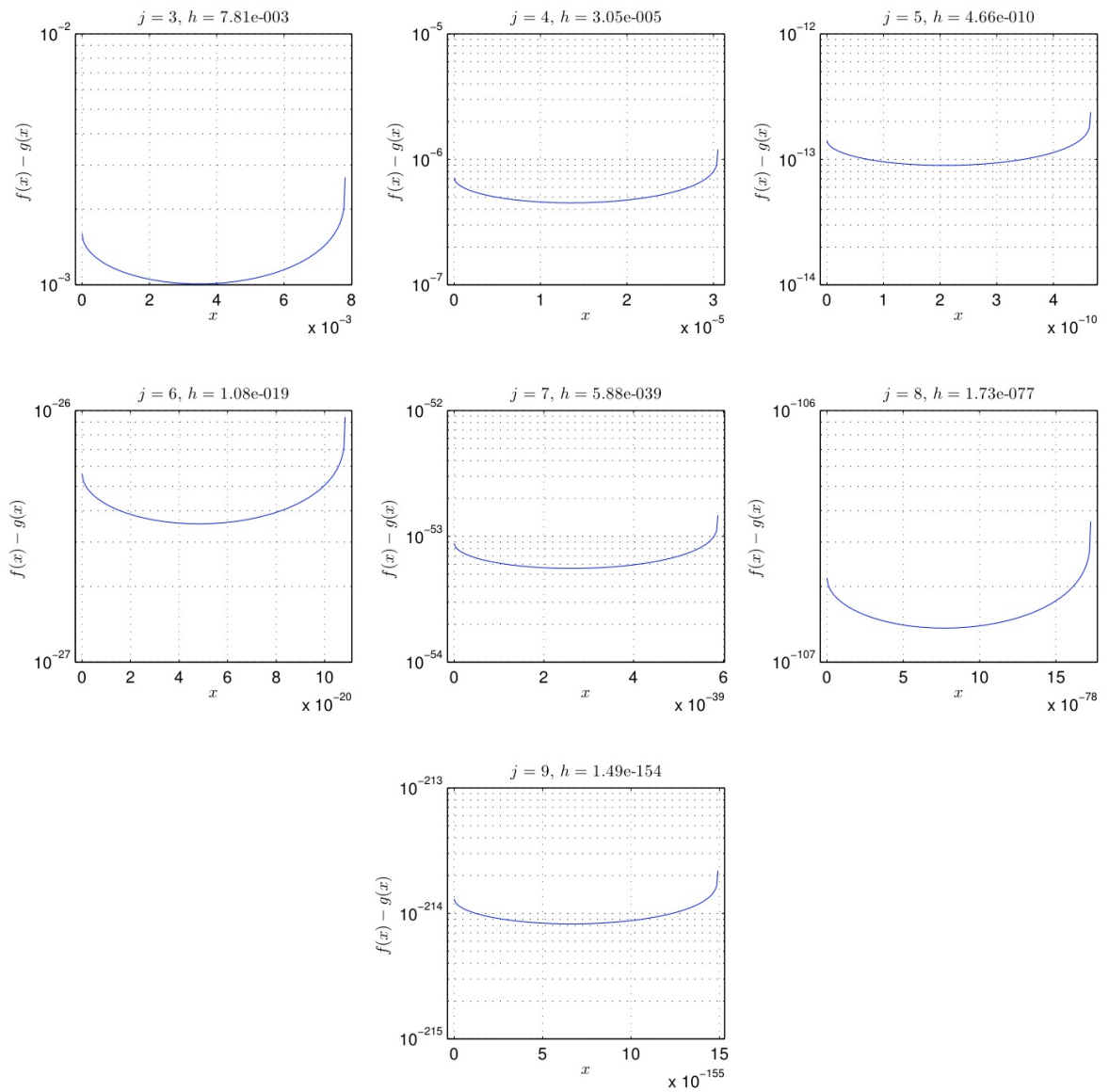
gilt.

5. Fall: $\mu = \eta + 4$

Nach der Behauptung (6.2.23) ist zu zeigen, dass für alle $t \in [\theta_{\eta+4}, \theta_{\eta+5})$

$$0 \leq \sum_{i=\eta}^{\eta+5} s_{\eta+4,i}(t) (m_1(i)(i - \eta - 4) + m_2(i) + m_3(i))$$


 Abbildung 6.4: Zum 3. Fall: Werte von $f(x) - g(x)$ für die Levels $3 \leq j \leq 9$


 Abbildung 6.5: Zum 4. Fall: Werte von $f(x) - g(x)$ für die Levels $3 \leq j \leq 9$

$$\begin{aligned}
 &= s_{\eta+4,\eta}(t)(7(\eta - \eta - 4) - 6) + s_{\eta+4,\eta+1}(t)(-49(\eta + 1 - \eta - 4) + 42 - 7) \\
 &\quad + s_{\eta+4,\eta+2}(t)(112(\eta + 2 - \eta - 4) - 96 + 42) + s_{\eta+4,\eta+3}(t)(-112(\eta + 3 - \eta - 4) + 96 - 70) \\
 &\quad + s_{\eta+4,\eta+5}(t)(-7(\eta + 5 - \eta - 4) + 6 - 7) \\
 &= -34s_{\eta+4,\eta}(t) + 182s_{\eta+4,\eta+1}(t) - 278s_{\eta+4,\eta+2}(t) + 138s_{\eta+4,\eta+3}(t) - 8s_{\eta+4,\eta+5}(t) \\
 &= \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{|t - \theta_{\eta+1}|^{216} |t - \theta_{\eta+3}|^{416} |t - \theta_{\eta+6}|^8}{|t - \theta_{\eta}|^{34} |t - \theta_{\eta+2}|^{460} |t - \theta_{\eta+4}|^{138} |t - \theta_{\eta+5}|^8} \right)
 \end{aligned}$$

gilt. Sei $t := \theta_{\eta+4} + x$ mit $x \in [0, h)$. Die beiden Funktionen

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= |x + 3h|^{54/115} |x + h|^{104/115} |x - 2h|^{2/115}, \\
 g(x) &:= |x + 4h|^{17/230} |x + 2h| |x|^{3/10} |x - h|^{2/115}
 \end{aligned}$$

werden definiert und es wird in Abbildung 6.6 numerisch für die Levels $3 \leq j \leq 9$ gezeigt, dass die Ungleichung

$$f(x) - g(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in [0, h)$$

gilt.

6. Fall: $\mu = \eta + 5$

Nach der Behauptung (6.2.23) ist zu zeigen, dass für alle $t \in [\theta_{\eta+5}, \theta_{\eta+6})$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sum_{i=\eta}^{\eta+5} s_{\eta+5,i}(t)(m_1(i)(i - \eta - 5) + m_2(i) + m_3(i)) \\
 &= s_{\eta+5,\eta}(t)(-1(\eta - \eta - 5) + 1) + s_{\eta+5,\eta+1}(t)(7(\eta + 1 - \eta - 5) - 7 + 1) \\
 &\quad + s_{\eta+5,\eta+2}(t)(-16(\eta + 2 - \eta - 5) + 16 - 6) + s_{\eta+5,\eta+3}(t)(16(\eta + 3 - \eta - 5) - 16 + 10) \\
 &\quad + s_{\eta+5,\eta+4}(t)(-7(\eta + 4 - \eta - 5) + 7 - 6) \\
 &= 6s_{\eta+5,\eta}(t) - 34s_{\eta+5,\eta+1}(t) + 58s_{\eta+5,\eta+2}(t) - 38s_{\eta+5,\eta+3}(t) + 8s_{\eta+5,\eta+4}(t) \\
 &= \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{|t - \theta_{\eta}|^6 |t - \theta_{\eta+2}|^{92} |t - \theta_{\eta+4}|^{46}}{|t - \theta_{\eta+1}|^{40} |t - \theta_{\eta+3}|^{96} |t - \theta_{\eta+5}|^8} \right)
 \end{aligned}$$

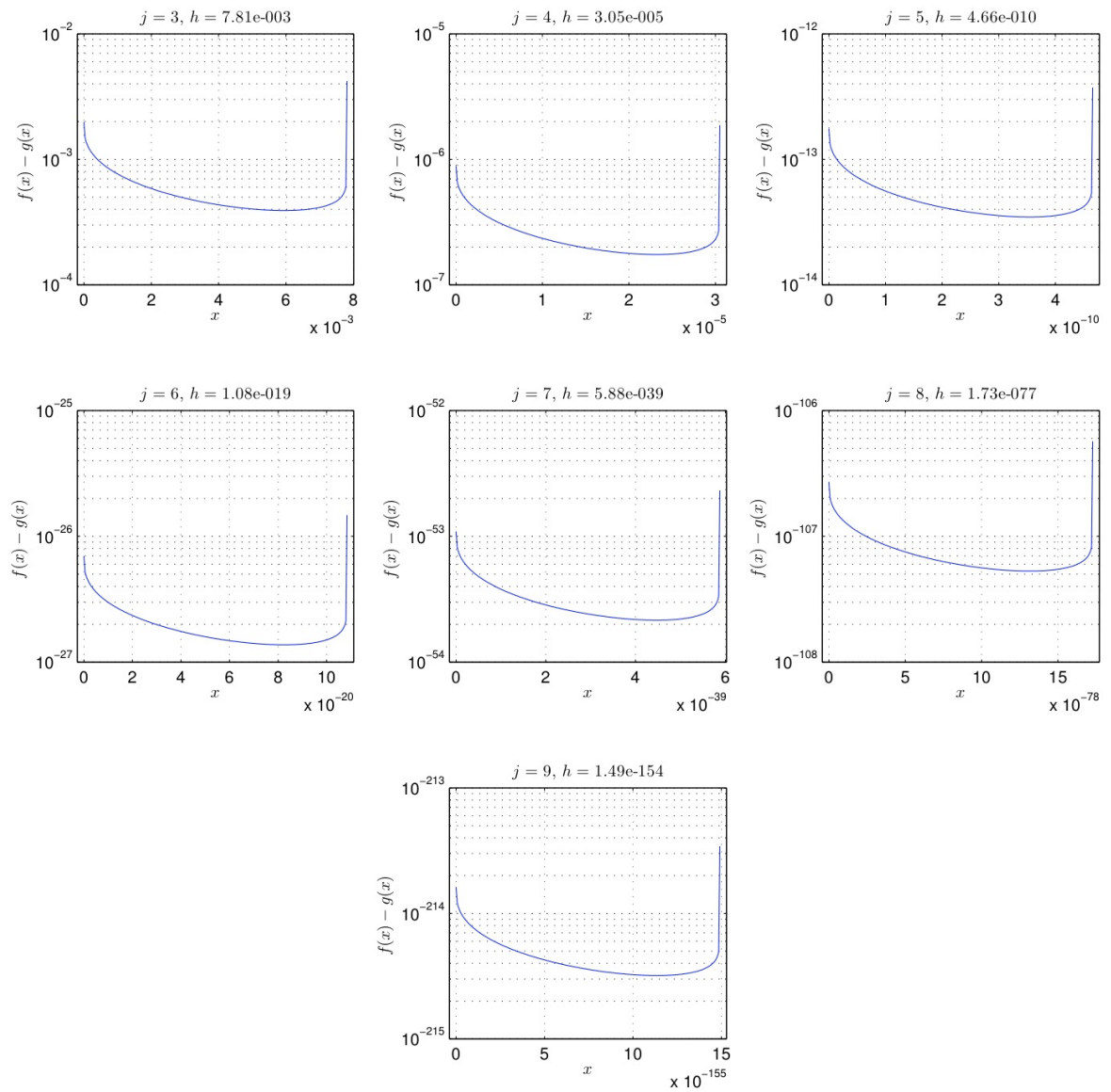
gilt. Sei $t := \theta_{\eta+5} + x$ mit $x \in [0, h)$. Die beiden Funktionen

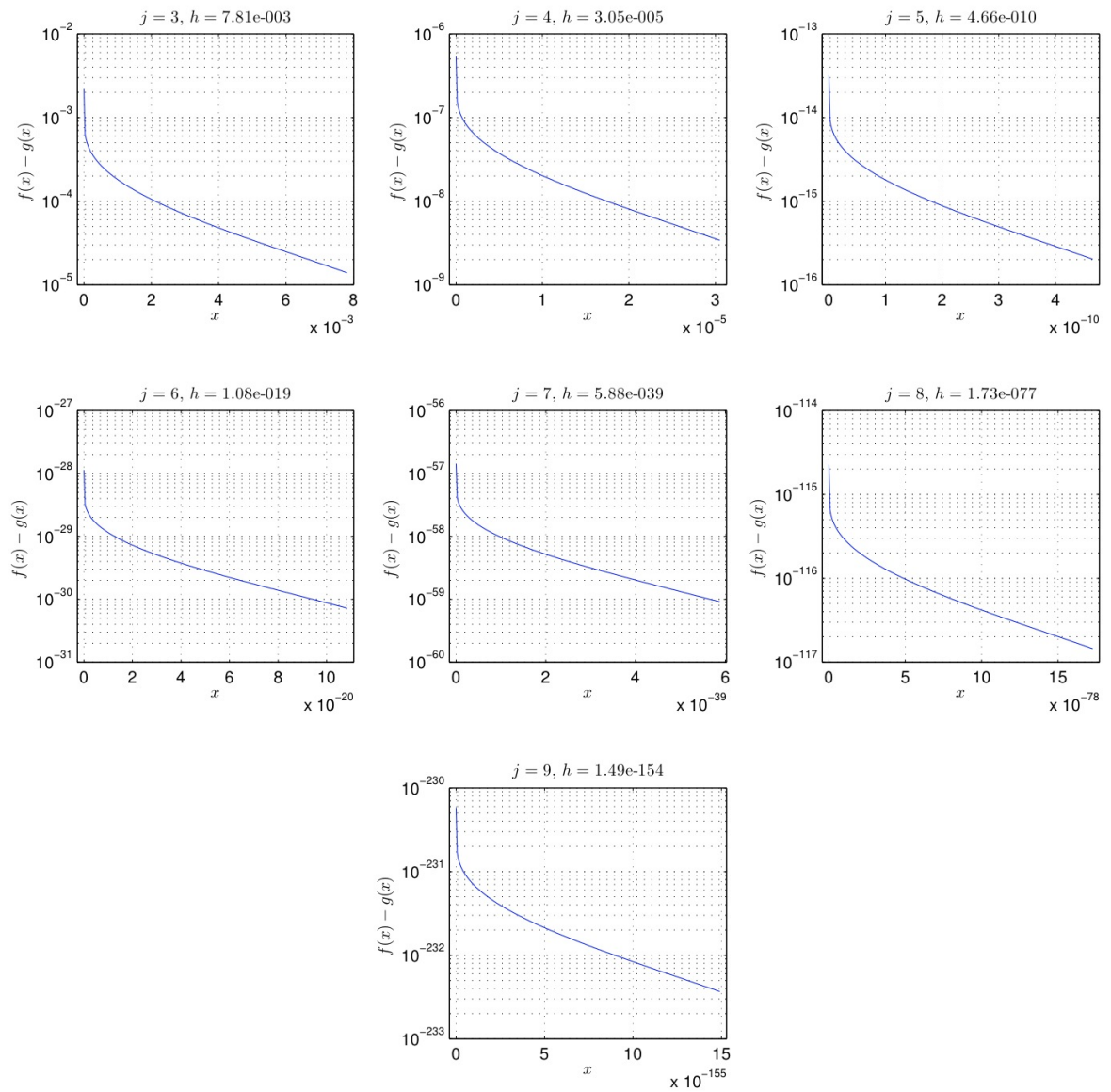
$$\begin{aligned}
 f(x) &:= |x + 5h|^{1/16} |x + 3h|^{23/24} |x + h|^{23/48}, \\
 g(x) &:= |x + 4h|^{5/12} |x + 2h| |x|^{1/12}
 \end{aligned}$$

werden definiert und es wird in Abbildung 6.7 numerisch für die Levels $3 \leq j \leq 9$ gezeigt, dass die Ungleichung

$$f(x) - g(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in [0, h)$$

gilt. □


 Abbildung 6.6: Zum 5. Fall: Werte von $f(x) - g(x)$ für die Levels $3 \leq j \leq 9$


 Abbildung 6.7: Zum 6. Fall: Werte von $f(x) - g(x)$ für die Levels $3 \leq j \leq 9$

Korollar 6.2.5. Für die instantane Frequenz eines Wavelets mit einem beliebigen Koeffizienten $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\gamma \psi_{j-1,k}(t) \quad \text{mit} \quad j_0 + 1 \leq j \leq J, \quad k \in \{2, \dots, \#\nabla_{j-1} - 1\},$$

gilt

$$\omega(t) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Beweis. Im Beweis des Satzes 6.2.4 wurde gezeigt, dass die Funktion

$$\alpha(t) = \mathbf{d}_{j-1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{d}_{j-1}$$

aus der Gleichung (6.2.18), die das Vorzeichen der instantanen Frequenz $\omega(t)$ festlegt, nicht-negativ ist, falls der Vektor der Waveletkoeffizienten $\mathbf{d}_{j-1}$ die Gestalt

$$\mathbf{d}_{j-1} = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow k}{1}, 0, \dots, 0)^\top = \mathbf{e}_k$$

besitzt, wobei $k \in \{2, \dots, \#\nabla_{j-1} - 1\}$ gilt. Nach der Multiplikation des Wavelets $\psi_{j-1,k}(t)$ mit einem beliebigen Koeffizienten γ gilt für das Vorzeichen der instantanen Frequenz des Wavelets $\psi_{j-1,k}(t)$

$$(\gamma \mathbf{d}_{j-1}^\top) \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} (\gamma \mathbf{d}_{j-1}) = \gamma^2 \alpha(t) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 1]. \quad \square$$

Es ist davon auszugehen, dass Aussagen über die instantanen Frequenzen von Wavelets am Rand des Intervalls $[0, 1]$ und für niedrigere Levels analog zu den Beweisen des Satzes 6.2.4 und des Korollars 6.2.5 gezeigt werden können. Für niedrigere Levels werden andere Maskenmatrizen $\mathbf{M}_{j-1,1}$ benötigt, die in [SDS96] zu finden sind.

Schließlich bleibt noch zu untersuchen, wie sich die instantane Frequenz einer Linearkombination von Wavelets auf dem selben Level mit beliebigen Koeffizienten verhält. Nach dem Satz 6.2.3 wird das Vorzeichen der instantanen Frequenz von

$$\alpha(t) = \mathbf{d}_{j-1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{d}_{j-1}$$

bestimmt, wobei nach wie vor die Ordnung $m = 2$ für die B-Spline-Einzelskalenfunktionen angenommen wird. Die Koeffizientenvektoren $\mathbf{d}_{j-1}$ lassen sich durch die Summe

$$\mathbf{d}_{j-1} = \sum_{k=1}^{\#\nabla_{j-1}} d_{j-1,k} \mathbf{e}_k$$

mit Einheitsvektoren $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^{\#\nabla_{j-1}}$ ausdrücken. Für $\alpha(t)$ erhält man damit

$$\alpha(t) = \sum_{k_1=1}^{\#\nabla_{j-1}} \sum_{k_2=1}^{\#\nabla_{j-1}} d_{j-1,k_1} d_{j-1,k_2} (\mathbf{e}_{k_1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_{k_2}). \quad (6.2.26)$$

Die rechte Seite der Gleichung (6.2.26) lässt sich in den ersten Summanden

$$\sum_{k=1}^{\#\nabla_{j-1}} d_{j-1,k}^2 \left(\mathbf{e}_k^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_k \right), \quad (6.2.27)$$

der nach dem Korollar 6.2.5 größer gleich null für alle $t \in [0, 1]$ ist, und in den zweiten Summanden

$$\sum_{k_1=1}^{\#\nabla_{j-1}} \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_1 \neq k_2}}^{\#\nabla_{j-1}} d_{j-1,k_1} d_{j-1,k_2} \left(\mathbf{e}_{k_1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_{k_2} \right) \quad (6.2.28)$$

aufteilen. Eine Beweismethode, die analog zu dem Beweis des Satzes 6.2.4 ist, kann für den Fall von ungleichen Einheitsvektoren in

$$\mathbf{e}_{k_1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_{k_2} \quad \text{mit} \quad k_1 \neq k_2 \quad (6.2.29)$$

nicht angewandt werden, da die Bedingung an ein nichtnegatives Vorzeichen von (6.2.29) nicht auf eine feste und vom Level unabhängige Anzahl von Fällen, wie im Beweis des Satzes 6.2.4, zurückgeführt werden kann.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird das Hauptresultat formuliert. Es wird eine Ungleichung für die Koeffizienten einer Linearkombination von Wavelets auf demselben Level $g_{j-1}(t)$ angegeben, die aussagt, wann die instantane Frequenz von $g_{j-1}(t)$ nicht negativ ist.

Korollar 6.2.6. *Das Vorzeichen der instantanen Frequenz $\omega(t)$ einer Linearkombination von Wavelets auf dem gleichen Level $g_{j-1}(t)$ wie in (6.2.1) ist nichtnegativ, falls die Ungleichung*

$$\alpha_1(t) \geq -\alpha_2(t) \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \quad (6.2.30)$$

mit den Definitionen

$$\alpha_1(t) := \sum_{k=1}^{\#\nabla_{j-1}} d_{j-1,k}^2 \left(\mathbf{e}_k^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_k \right) \geq 0$$

und

$$\alpha_2(t) := \sum_{k_1=1}^{\#\nabla_{j-1}} \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_1 \neq k_2}}^{\#\nabla_{j-1}} d_{j-1,k_1} d_{j-1,k_2} \left(\mathbf{e}_{k_1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_{k_2} \right)$$

gilt. $\alpha_2(t)$ ist äquivalent zu

$$\alpha_2(t) = \sum_{k_1=1}^{\#\nabla_{j-1}} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} d_{j-1,k_1} d_{j-1,k_2} \mathbf{e}_{k_1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \left(\mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top - \mathbf{PDS}(t) \mathbf{DQ}^\top \right) \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_{k_2} \quad (6.2.31)$$

und die Matrix

$$\mathbf{X}(t) := \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top - \mathbf{PDS}(t) \mathbf{DQ}^\top \quad (6.2.32)$$

ist symmetrisch, d. h.

$$\mathbf{X}^\top(t) = \mathbf{X}(t) \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Beweis. Die erste Behauptung (6.2.30) folgt direkt aus den Gleichungen (6.2.27) und (6.2.28) unmittelbar vor dem Korollar. Für die äquivalente Darstellung von $\alpha_2(t)$ wird die innere Summe aufgetrennt, d. h.

$$\begin{aligned} \alpha_2(t) = & \sum_{k_1=1}^{\# \nabla_{j-1}} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} d_{j-1,k_1} d_{j-1,k_2} \left(\mathbf{e}_{k_1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_{k_2} \right) \\ & + \sum_{k_1=1}^{\# \nabla_{j-1}} \sum_{k_2=k_1+1}^{\# \nabla_{j-1}} d_{j-1,k_1} d_{j-1,k_2} \left(\mathbf{e}_{k_1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_{k_2} \right) \end{aligned}$$

und man erhält wegen

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=1}^{\# \nabla_{j-1}} \sum_{k_2=k_1+1}^{\# \nabla_{j-1}} d_{j-1,k_1} d_{j-1,k_2} \left(\mathbf{e}_{k_1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_{k_2} \right) \\ = & \sum_{k_2=1}^{\# \nabla_{j-1}} \sum_{k_1=1}^{k_2-1} d_{j-1,k_2} d_{j-1,k_1} \left(\mathbf{e}_{k_2}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_{k_1} \right) \end{aligned}$$

die Darstellung

$$\sum_{k_1=1}^{\# \nabla_{j-1}} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} d_{j-1,k_1} d_{j-1,k_2} \left(\mathbf{e}_{k_1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_{k_2} + \mathbf{e}_{k_2}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_{k_1} \right)$$

für $\alpha_2(t)$. Mit

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k_2}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_{k_1} &= \left(\mathbf{e}_{k_2}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{QDS}(t) \mathbf{DP}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_{k_1} \right)^\top \\ &= -\mathbf{e}_{k_1}^\top \mathbf{M}_{j-1,1}^\top \mathbf{PDS}(t) \mathbf{DQ}^\top \mathbf{M}_{j-1,1} \mathbf{e}_{k_2} \end{aligned}$$

und nach ausklammern folgt die äquivalente Darstellung von $\alpha_2(t)$ aus der Gleichung (6.2.31). Die Matrix $\mathbf{X}(t)$ ist nach ihrer Definition in (6.2.32) symmetrisch. $\square$

Da die Funktion $\alpha_1(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ größer gleich null ist, kann für die Ungleichung (6.2.30) die hinreichende Bedingung

$$\alpha_2(t) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 1]$$

formuliert werden, was den Rechenaufwand zur Überprüfung der Ungleichung (6.2.30) reduzieren könnte.

6.3 Frequenzmodulationen bei Wavelets

Wavelets ψ_{j,k_1} und ψ_{j,k_2} auf einem Level j und an unterschiedlichen Orten $k_1 \neq k_2$ (außer einigen wenigen am Rand) lassen sich durch Translation ineinander überführen, d. h.

$$\psi_{j,k_1}(t) = \psi_{j,k_2}(t + \tau) \quad \text{für } k_1 \neq k_2 \text{ und } \tau \in \mathbb{R}.$$

ψ_{j,k_1} und ψ_{j,k_2} oszillieren mit derselben Frequenz an unterschiedlichen Orten. Das bedeutet, dass die instantane Frequenz einer Linearkombination von Wavelets auf dem selben Level j bei gleichen Vorzeichen der Waveletkoeffizienten nahezu konstant bleibt. Dagegen besitzen die IMF-Komponenten der EMD die Eigenschaft, Variationen in den instantanen Frequenzen darstellen zu können.

Eine Möglichkeit, Frequenzmodulationen auch bei den Komponenten $g_j = \mathbf{d}_j^\top \boldsymbol{\psi}_j$ der Zerlegung der adaptiven Wavelet-Approximation zu erhalten, besteht darin, die Knoten der B-Splines, aus denen die Wavelets gebildet werden, nicht auf einem dyadischen Gitter, sondern mit flexiblen Abständen anzuordnen. Das hätte allerdings den Nachteil, dass die Effizienz des Approximationsalgorithmus wie auch die Semiorthogonalität nicht mehr gegeben wäre. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, Teilintervalle des Trägers des Signals in der Länge so zu dehnen oder zu stauchen, dass das Signal auf dieser neuen Parametrisierung des Trägers von der adaptiven Wavelet-Approximation in möglichst wenige Komponenten g_j zerlegt wird. Eine Zerlegung in wenige Komponenten g_j ist äquivalent dazu, dass die Zerlegung nur wenige Levels benötigt.

Zunächst wird das Monokomponentensignal

$$s(t) = a(t) \cos(\varphi(t)), \quad t \in [0, 1],$$

betrachtet. Die EMD würde voraussichtlich das komplette Signal $s(t)$ in eine IMF-Komponente einbetten. Bei einer exponentiell wachsenden instantanen Frequenz $\varphi'(t)$ wie in dem Beispiel 3.3.5 (iii) ließe sich das Signal $s(t)$ aber offensichtlich nicht in der Wavelet-Basis auf nur einem Level darstellen, da für zunehmende Frequenzen höhere Levels nötig wären. Aus diesem Grund ist eine bijektive Parametrisierung

$$p : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

des Intervalls $[0, 1]$, die stetig, $p \in C([0, 1])$, und streng monoton steigend ist, gesucht, sodass das Signal

$$s(p(t)) = a(p(t)) \cos(\varphi(p(t))), \quad t \in [0, 1].$$

in einer Wavelet-Basis mit einer möglichst geringen Anzahl von Levels dargestellt werden kann. Um das zu erreichen, müsste das parametrisierte Signal $s(p(t))$ eine konstante instantane Frequenz aufweisen, d. h.

$$s(p(t)) = a(p(t)) \cos(\omega t + \vartheta)$$

mit $\omega, \vartheta \in \mathbb{R}$. Folglich ist eine Parametrisierung $p(t)$ gesucht, die

$$\varphi(p(t)) = \omega t + \vartheta \tag{6.3.1}$$

erfüllt. Die Gleichung (6.3.1) kann bei einer streng monoton steigenden Phase $\varphi \in C^1([0, 1])$ in

$$p(t) = \varphi^{-1}(\omega t + \vartheta)$$

umgeformt werden. Die Parameter ω und ϑ hängen von der Phasenfunktion $\varphi(t)$ ab, und für sie muss

$$\begin{aligned}\vartheta &= \min_{t \in [0,1]} \varphi(t) = \varphi(0), \\ \omega &= \max_{t \in [0,1]} \varphi(t) - \vartheta = \varphi(1) - \vartheta\end{aligned}$$

gelten. Das Verfahren zum Zerlegen des Signals $s(t)$ lässt sich dann mit dem folgenden Algorithmus beschreiben:

- (i) Finde eine Parametrisierung $p(t)$, die die oben genannten Bedingungen erfüllt.
- (ii) Zerlege das parametrisierte Signal $s(p(t))$.
- (iii) Wende die Umkehrfunktion der Parametrisierung $p^{-1}(t)$ auf die Zerlegung aus (ii) an.

Im Schritt (ii) kann eine beliebige Methode, z. B. auch die diskrete oder die kontinuierliche Wavelet-Transformation angewandt werden. Nach einer Parametrisierung einer Menge von Datenpunkten sind die Datenpunkte im Allgemeinen nicht mehr äquidistant verteilt, auch wenn sie vor der Parametrisierung äquidistant verteilt waren. Die adaptive Wavelet-Approximation eignet sich deswegen besser für eine Zerlegung im Schritt (ii). Um eine Parametrisierung $p(t)$ mit den oben beschriebenen Eigenschaften zu erhalten, wird eine lineare Transformation von Teilintervallen des Intervalls $[0, 1]$ vorgeschlagen. Dazu wird die Folge $(t_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ sich sukzessive abwechselnder Null- und Extremstellen des Monokomponentensignals $s(t)$ bestimmt, d. h.

$$0 \leq t_i < t_{i+1} \leq 1 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N-1,$$

für die gilt

$$\begin{aligned}\text{falls } s(t_i) &= 0, \text{ dann } s'(t_{i+1}) = 0, \\ \text{falls } s'(t_i) &= 0, \text{ dann } s(t_{i+1}) = 0.\end{aligned}$$

Seien zusätzlich t_0 und t_{N+1} als

$$t_0 := 0 \quad \text{und} \quad t_{N+1} := 1$$

definiert, dann ist die Parametrisierung $p(t)$ stückweise durch die lineare Intervalltransformation

$$p(t) := \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad (6.3.2)$$

für alle $i = \{0, \dots, N\}$ definiert. Diese Vorgehensweise ist in Abbildung 6.8 für ein Chirp-Signal mit exponentiell wachsender Amplitude veranschaulicht.

Während die adaptive Wavelet-Approximation alleine nur in der Lage war, Monokomponentensignale mit einer konstanten instantanen Frequenz

$$s(t) = a(t) \cos(\omega t + \vartheta)$$

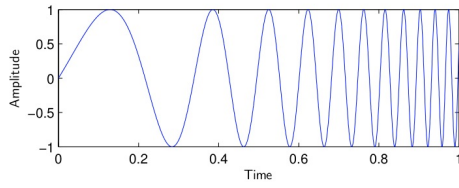
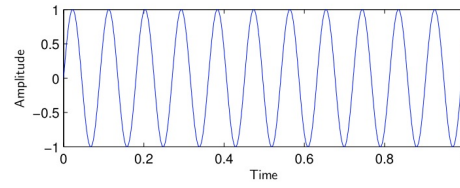

 (a) Signal $s(t)$ vor der Parametrisierung

 (b) Signal $s(p(t))$ nach der Parametrisierung

 Abbildung 6.8: Parametrisierung des Intervalls $[0, 1]$

in eine Wavelet-Basis mit einer geringen Anzahl von Levels zu zerlegen, ermöglicht die vorherige Parametrisierung $p(t)$ des Intervalls $[0, 1]$ auch die Zerlegung von Monokomponentensignalen mit einer variablen instantanen Frequenz

$$s(p(t)) = a(p(t)) \cos(\omega p(t) + \vartheta)$$

in einer Wavelet-Darstellung mit wenigen Levels.

Als nächstes wird eine Summe von Monokomponentensignalen

$$s(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \cos(\varphi_j(t)), \quad t \in [0, 1], \quad (6.3.3)$$

mit

$$\varphi'_j(t) > \varphi'_{j+1}(t) \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, n-1\} \text{ und für alle } t \in [0, 1]$$

betrachtet. Bei der Verallgemeinerung des Zerlegungsalgorithmus mit einer Parametrisierung des Intervalls $[0, 1]$ von einem Monokomponentensignal auf eine Summe von Monokomponentensignalen entstehen eine Reihe zusätzlicher Probleme:

- Mit einer einzigen Parametrisierung ist es im Allgemeinen nicht möglich, die instantanen Frequenzen aller Komponenten von $s(t)$ näherungsweise konstant zu bekommen. Es ist für jede Komponente $a_j(t) \cos(\varphi_j(t))$ von $s(t)$ eine Parametrisierung $p_j(t)$ nötig, welche die instantane Frequenz der j -en Komponente in eine näherungsweise konstante Funktion umwandelt.
- Aus den Nullstellen des Signals können keine Informationen über die Nullstellen einer Komponente $a_j(t) \cos(\varphi_j(t))$, $j = 1, \dots, n$, gewonnen werden.
- Die Erfassung von Frequenzmodulationen zwischen zwei Extremstellen wird schlechter, weil die Nullstellen nicht für die Bestimmung einer Parametrisierung verwendet werden können.
- Die Extremstellen des Signals sind die Punkte, in deren Umgebung sich die Extremstellen der ersten Komponente $a_1(t) \cos(\varphi_1(t))$ befinden, somit sind die Extremstellen der ersten Komponente nur approximativ bekannt.

- Die Extremstellen der Komponenten $a_j(t) \cos(\varphi_j(t))$ für $j > 1$ können nicht einmal approximativ aus dem Signal gewonnen werden.

Die aufgeführten Probleme verhindern eine Verallgemeinerung des Zerlegungsalgorithmus mit einer Parametrisierung mittels linearer Intervalltransformationen wie in (6.3.2). Das Data-Fitting-Problem 5.2.1 wird daher zu einem nichtlinearen Approximationsproblem erweitert.

Problem 6.3.1. Gegeben sei eine Menge beliebig verteilter und nicht zusammenfallender Punkte $P := \{(t_i, z_i) \in [0, 1] \times \mathbb{R} : i = 1, \dots, N\}$. Gesucht ist eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$f(t) = \sum_{j=j_0}^J d_j^\top \psi_j(t) + c_{j_0}^\top \phi_{j_0}(t)$$

und Parametrisierungen

$$p_j : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit } p_j \in C([0, 1]) \text{ streng monoton steigend für } j = j_0, \dots, J,$$

sodass

$$\sum_{i=1}^N \left(z_i - \sum_{j=j_0}^J d_j^\top \psi_j(p_j(t_i)) - c_{j_0}^\top \phi_{j_0}(t_i) \right)^2$$

und

$$\delta := J - j_0$$

minimiert werden.

Die Lösung $f(t)$ des nichtlinearen Approximationsproblems 6.3.1 ist schließlich eine Approximation von Datenpunkten des Signals $s(t)$ aus Gleichung (6.3.3), die durch Frequenzmodulationen bei den Wavelet-Basen $p_j(t)$ eine minimale Anzahl von Levels $\delta = J - j_0$ besitzt.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden zunächst die Zeit-Frequenz-Analysemethoden Fourier-Transformation bzw. Short-Time-Fourier-Transformation, kontinuierliche Wavelet-Transformation und Hilbert-Huang-Transformation qualitativ miteinander verglichen. Es wurden umfangreiche Vergleiche mit synthetischen und aus Anwendungen stammenden Signalen vorgenommen. Dabei stellte sich heraus, dass die Wahl der Analysemethode entscheidend von dem zu untersuchenden Signal abhängt.

Mit der Fourier-Transformation lassen sich lediglich stationäre und lineare Signale untersuchen. Ihre Anwendung erfordert jedoch im Vergleich zu den anderen Methoden eine geringe Berechnungszeit. Des Weiteren existiert für sie eine mathematische Theorie.

Die Short-Time-Fourier-Transformation und die kontinuierliche Wavelet-Transformation eignen sich für die Analyse nichtstationärer und linearer Signale. Für beide Methoden sind bereits mathematische Theorien entwickelt worden. Die Auflösung in der Zeitachse kann bei ihnen zu Lasten der Auflösung in der Frequenzachse und umgekehrt verbessert werden. Das geschieht durch unterschiedliche Fensterbreiten bei der Short-Time-Fourier-Transformation bzw. unterschiedliche Wavelet-Familien bei der kontinuierlichen Wavelet-Transformation. Bei der Untersuchung der hydrologischen Messdaten im Abschnitt 3.5 hat sich die Short-Time-Fourier-Transformation als untauglich erwiesen. Sie wich bei der Lokalisierung der Frequenzen durchgehend von den Ergebnissen der kontinuierlichen Wavelet-Transformation und der Hilbert-Huang-Transformation ab.

Die Hilbert-Huang-Transformation stellt von den vorgestellten Methoden die wenigsten Voraussetzungen an das zu untersuchende Signal. Sie ist in der Lage, nichtstationäre und nichtlineare Signale zu analysieren. Ihre Fähigkeit irregulär verteilte Datenpunkte zu verarbeiten ist ein Alleinstellungsmerkmal unter den in dieser Arbeit behandelten Zeit-Frequenz-Analysemethoden. Ein wichtiger Bestandteil der HHT ist der heuristische Algorithmus der Empirical Mode Decomposition. Die EMD bietet eine Reihe von Vorteilen gegenüber den anderen Methoden. Die additive Zerlegung der EMD besteht aus vergleichsweise wenigen adaptiv zum untersuchten Signal erzeugten IMF-Komponenten. Die IMFs sind Approximationen von frequenz- und amplitudenmodulierten Monokomponentensignalen mit positiven Eigenschaften bezüglich ihrer instantanen Frequenzen. Die instantanen Frequenzen sind deut-

lich voneinander separiert, und das von der HHT erzeugte Spektrum bietet im Vergleich zu den Spektren der anderen Methoden eine sehr klare Darstellung. Zu den großen Nachteilen der EMD zählt dessen unzureichende mathematische Theorie. Eine Konvergenztheorie konnte bisher nicht formuliert werden, und die Eindeutigkeit der Ergebnisse der EMD ist nicht bewiesen. Des Weiteren treten in der Praxis IMFs mit negativen instantanen Frequenzen auf, und in [SV06] konnten Beispiele für IMFs angegeben werden, die nachweislich negative instantane Frequenzen besitzen.

Die Probleme bei der HHT haben den in dieser Arbeit erstmals vorgestellten Ansatz motiviert, der eine neuartige Alternative zur EMD aufzeigen soll. Die Zerlegung der EMD in IMF-Komponenten wurde durch die adaptive Wavelet-Approximation substituiert. Die IMF-Komponenten wurden als Linearkombinationen von Wavelets auf demselben Level identifiziert. Die instantanen Frequenzen der Linearkombinationen wurden theoretisch untersucht. Das Ziel, Bedingungen für die Koeffizienten der Linearkombinationen von Wavelets auf demselben Level festzulegen, damit ihre instantanen Frequenzen nicht negativ sind, wurde mit dem Korollar 6.2.6 erreicht. Das Ergebnis des Korollars kann eingesetzt werden, um anhand der Koeffizienten das Vorzeichen der instantanen Frequenz einer Linearkombination von Wavelets auf demselben Level zu überprüfen. Als Ziel für zukünftige Arbeiten kann eine Reduktion der Komplexität der Berechnungen für das Vorzeichen der instantanen Frequenz im Korollar 6.2.6 formuliert werden.

Die Frequenzmodulationen bei den IMFs sind mit entscheidend für die vergleichsweise geringe Anzahl von IMF-Komponenten bei der EMD. Aus diesem Grund wurden in dieser Arbeit Frequenzmodulationen bei Linearkombinationen von Wavelets auf demselben Level studiert. Es konnte eine Verallgemeinerung des Data-Fitting-Problems zu einer nichtlinearen Wavelet-Approximation mit Frequenzmodulationen erreicht werden. Für die Lösung des neuen nichtlinearen Data-Fitting-Problems müssen nichtlineare Approximationsmethoden untersucht werden, was ein Ziel für zukünftige Arbeiten darstellt.

Anhang A

Eingabe- und Ausgabeparameter des EMD-Algorithmus

Alle Berechnungen in dieser Arbeit wurden mit MATLAB, Version 7.9 (R2009b) auf einem System mit AMD Athlon 64 X2 Dual Core Prozessor und 2 GB Arbeitsspeicher durchgeführt. Die Eingabeparameter für die EMD und dessen Ausgabewerte sind für das Beispiel 3.3.5 in Tabelle A.1 und für die Analyse der Abflussdaten aus Abschnitt 3.5 in Tabelle A.2 aufgelistet. Zu jeder Zeitreihe ist die Anzahl ihrer Datenpunkte angegeben. Die Schranke für das Standardabweichungskriterium der inneren Iteration des EMD-Algorithmus 3.3.4 wird in den Tabellen mit ϵ bezeichnet. n_r ist die maximale Anzahl der Extremstellen, die das Residuum der EMD höchstens haben darf. Als Ausgabewerte sind für jede IMF-Komponente die Anzahl der Iterationen, die benötigt wurden, um diese IMF zu erhalten, angegeben und schließlich wird die Rechenzeit in Sekunden für den kompletten EMD-Algorithmus genannt.

Tabelle A.1: EMD Eingabe- und Ausgabeparameter des Beispiels 3.3.5

Beispiel 3.3.5	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
Anzahl der Datenpunkte	1024	512 + 256	4096	9500
ϵ	0.005	0.001	0.012	0.2
n_r	4	5	5	5
IMF 1	2	3	3	1
IMF 2	3	17	2	1
IMF 3	4	12	7	1
IMF 4			11	1
IMF 5			11	1
IMF 6			15	1
IMF 7			12	
IMF 8			12	
IMF 9			9	
Rechenzeit (s)	0.9700	0.3303	3.6534	12.2728

Tabelle A.2: EMD Eingabe- und Ausgabeparameter der Abflussdatenanalyse aus dem Abschnitt 3.5

Abflussstation Zeitraum	Dedenborn		Erkensruhr		Rollesbroich	
	90–99	91–93	90–99	91–93	90–99	91–93
Anzahl der Datenpunkte	3652	1096	3652	1096	3652	1096
ϵ	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
n_r	5	5	5	5	5	5
IMF 1	2	2	2	2	2	2
IMF 2	2	2	2	2	2	2
IMF 3	2	2	2	2	2	2
IMF 4	2	2	2	2	2	2
IMF 5	2	2	2	2	2	2
IMF 6	2		2		2	
IMF 7	2		2		2	
IMF 8	2					
IMF 9	2					
Rechenzeit (s)	0.0244	0.0051	0.0167	0.0048	0.0185	0.0048

Symbolverzeichnis

x bzw. $f(\cdot)$	Skalar bzw. skalarwertige Funktion
$\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{f}(\cdot)$	Vektor bzw. vektorwertige Funktion
$\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{F}(\cdot)$	Matrix bzw. matrixwertige Funktion
$\operatorname{Re}(\cdot)$	Realteil einer komplexen Zahl
$\operatorname{Im}(\cdot)$	Imaginärteil einer komplexen Zahl
$\bar{z}$	Konjugiert komplexe Zahl, wobei $z \in \mathbb{C}$
X	Zufallsvariable
(Ω, Σ, P)	Maßraum
Ω	Ergebnisraum
$\omega \in \Omega$	Elementarereignis
Σ	σ -Algebra
P	Wahrscheinlichkeitsmaß
F_X	Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X
$F_{X_1, \dots, X_n}$	Gemeinsame Verteilungsfunktion von n Zufallsvariablen $(X_1, \dots, X_n)$
f_X	Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X
$E[\cdot]$	Erwartungswert einer Zufallsvariablen
$\operatorname{Var}[\cdot]$	Varianz einer Zufallsvariablen
$\operatorname{Cov}[\cdot]$	Kovarianz einer Zufallsvariablen
$(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$	Zeitreihe
$(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$	Stochastischer Prozess
$\mu(t)$	Mittelwertfunktion eines stochastischen Prozesses
$\sigma^2(t)$	Varianzfunktion eines stochastischen Prozesses
$\gamma(s, t)$	Kovarianzfunktion eines stochastischen Prozesses
$l_p(I)$	Folgenraum mit Norm $\ (x_n)_{n \in I}\ _{l_p} := (\sum_{n \in I} x_n ^p)^{1/p} < \infty$ für $p \geq 1$
$L_p(\Omega)$	Funktionsraum mit Norm $\ f\ _{L_p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} f(x) ^p dx \right)^{1/p} < \infty$ für $1 \leq p < \infty$
$(f, g)_{L_2(\Omega)}$	L_2 -Skalarprodukt, das als $(f, g)_{L_2(\Omega)} := \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$ definiert ist
C^m	Raum der m -mal stetig differenzierbaren Funktionen ($C^0 = C$)
H^s	Sobolevraum der s -mal schwach differenzierbaren Funktionen
$(f * g)$	Faltung der Funktionen f und g

supp	Träger einer Funktion
diam	Durchmesser einer Menge
$\mathcal{F}[\cdot]$	Fourier-Transformation
$\mathcal{F}_s[\cdot]$	Short-Time-Fourier-Transformation
$\mathcal{H}[\cdot]$	Hilbert-Transformation
$\langle \omega \rangle$	Durchschnittsfrequenz
$a(\cdot)$	Amplitude eines komplexwertigen Signals
$\varphi(\cdot)$	Phase eines komplexwertigen Signals
$\omega(\cdot)$	Instantane Frequenz
$\mathcal{A}[\cdot]$	Analytisches Signal
$u[\cdot]$	Obere Einhüllende einer Funktion
$l[\cdot]$	Untere Einhüllende einer Funktion
$B_{k,m}$	k -ter B-Spline der Ordnung m
$\mathcal{W}_\psi[\cdot]$	Kontinuierliche Wavelet-Transformation bezüglich des Wavelets ψ
T_J	Diskrete Wavelet-Transformation mit maximalem Level J
S_j	Funktionsraum der Einzelskalenfunktionen auf Level j
W_j	Funktionsraum der Multiskalenfunktionen oder auch Wavelets auf Level j
Δ_j	Indexmenge der Orte der Einzelskalenfunktionen auf Level j
∇_j	Indexmenge der Orte der Wavelets auf Level j
$\#\Delta_j$	Anzahl der Elemente von Δ_j
$\#\nabla_j$	Anzahl der Elemente von ∇_j
$\phi_{j,k}$	Einzelskalenfunktion auf Level j am Ort k
$\psi_{j,k}$	Wavelet auf Level j am Ort k
ϕ_j	Vektor mit Einzelskalenfunktionen $\phi_j := (\phi_{j,1}, \dots, \phi_{j,\#\Delta_j})$
ψ_j	Vektor mit Wavelets $\psi_j := (\psi_{j,1}, \dots, \psi_{j,\#\nabla_j})$
c_j	Vektor mit Entwicklungskoeffizienten der Einzelskalenfunktionen ϕ_j
d_j	Vektor mit Entwicklungskoeffizienten der Wavelets ψ_j
M_j	Maskenmatrix
G_j	Inverse von M_j

Literaturverzeichnis

- [AF95] F. Auger and P. Flandrin, *Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method*, Signal Processing, IEEE Transactions on **43** (1995), no. 5, 1068–1089.
- [BD91] P. J. Brockwell and R. A. Davis, *Time series: theory and methods*, second ed., Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Bed63] E. Bedrosian, *A product theorem for Hilbert transforms*, Proceedings of the IEEE **51** (1963), no. 5, 868–869.
- [BHH⁺05] H. R. Bogen, J. F. Hake, M. Herbst, R. Kunkel, C. Montzka, T. Puetz, H. Ver-ecken, and F. Wendland, *MOSYRUR-Water balance analysis in the Rur basin*, Schriften des Forschungszentrums Jülich, Reihe Umwelt 52, 2005, 155 p.
- [BKS⁺05] H. Bogen, R. Kunkel, T. Schöbel, H. P. Schrey, and F. Wendland, *Distributed modelling of groundwater recharge at the macroscale*, Ecological Modelling **187** (2005), 15–26.
- [BNB00] G. Bachmann, L. Narici, and E. Beckenstein, *Fourier and wavelet analysis*, 2. ed., Springer-Verlag, 2000.
- [Bra78] R. N. Bracewell, *The Fourier transform and its applications*, second ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.
- [Bro05] M. Brookes, *The matrix reference manual*, online, 2005, <http://www.ee.ic.ac.uk/hp/staff/dmb/matrix/intro.html> (Retrieved December 04, 2009).
- [BS88] C. Bennett and R. C. Sharpley, *Interpolation of operators*, Pure and Applied Mathematics, vol. 129, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.
- [CAF03] E. Chassande-Mottin, F. Auger, and P. Flandrin, *Time-frequency/time-scale reas-
signment*, Wavelets and signal processing (L. Debnath, ed.), Appl. Numer. Har-
mon. Anal., Birkhäuser, Boston, MA, 2003, pp. 233–267.
- [Cas05] D. Castaño, *Adaptive scattered data fitting with tensor product spline-
wavelets*, Doctoral Thesis, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn,

- 2005, URN: urn:nbn:de:hbz:5n-04880, URL: http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online/math_nat_fak/2005/castano-diez_daniel.
- [CDAF97] E. Chassande-Mottin, I. Daubechies, F. Auger, and P. Flandrin, *Differential re-assignment*, Signal Processing Letters, IEEE **4** (1997), no. 10, 293–294.
- [CDF92] A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau, *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), no. 5, 485–560.
- [CHRX06] Q. Chen, N. E. Huang, S. Riemenschneider, and Y. Xu, *A B-spline approach for empirical mode decompositions*, Adv. Comput. Math. **24** (2006), no. 1–4, 171–195.
- [Chu92] C. K. Chui, *An introduction to wavelets*, Wavelet Analysis and its Applications, vol. 1, Academic Press Inc., Boston, MA, 1992.
- [CK03] D. Castaño and A. Kunoth, *Adaptive fitting of scattered data by spline wavelets*, Curve and surface fitting (Saint-Malo, 2002) (A. Cohen, J.-L. Merrien, and L. L. Schumaker, eds.), Mod. Methods Math., Nashboro Press, Brentwood, TN, 2003, pp. 65–78.
- [CK06] ———, *Robust regression of scattered data with adaptive spline-wavelets*, Image Processing, IEEE Transactions on **15** (2006), no. 6, 1621–1632.
- [Coh94] L. Cohen, *Time-frequency analysis*, Prentice Hall Signal Processing Series, Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, NJ, December 1994.
- [CQ92] C. K. Chui and E. Quak, *Wavelets on a bounded interval*, Numerical methods in approximation theory, Vol. 9 (Oberwolfach, 1991) (D. Braess and L. L. Schumaker, eds.), Internat. Ser. Numer. Math., vol. 105, Birkhäuser, Basel, 1992, pp. 53–75.
- [CS47] H. B. Curry and I. J. Schoenberg, *On spline distribution and their limits: the Pólya distribution functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), no. 11, 1114.
- [CT05] K. Coughlin and K. K. Tung, *Empirical mode decomposition and climate variability*, Hilbert-Huang transform and its applications (N. E. Huang and S. S. P. Shen, eds.), Interdiscip. Math. Sci., vol. 5, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, pp. 149–165.
- [Dau88] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), no. 7, 909–996.

- [Dau92] ———, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 61, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.
- [dB01] C. de Boor, *A practical guide to splines*, revised ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 27, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Del07] É. Deléchelle, *Empirical mode decomposition (EMD)*, MATLAB code, online, 2007, <http://pagesperso-orange.fr/e.delechelle/codes.htm> (Retrieved February 18, 2010).
- [DKU99] W. Dahmen, A. Kunoth, and K. Urban, *Biorthogonal spline wavelets on the interval—stability and moment conditions*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **6** (1999), no. 2, 132–196.
- [DLN05] É. Deléchelle, J. Lemoine, and O. Niang, *Empirical mode decomposition: an analytical approach for sifting process*, Signal Processing Letters, IEEE **12** (2005), no. 11, 764–767.
- [DLW09] I. Daubechies, J. Lu, and H.-T. Wu, *Synchrosqueezed wavelet transforms: a tool for empirical mode decomposition*, submitted for publication, December 2009.
- [DM96] I. Daubechies and S. Maes, *A nonlinear squeezing of the continuous wavelet transform based on auditory nerve models*, Wavelets in Medicine and Biology (A. Aldroubi and M. Unser, eds.), CRC Press, 1996, pp. 527–546.
- [Duf05] D. G. Duffy, *The application of Hilbert-Huang transforms to meteorological datasets*, Hilbert-Huang transform and its applications (N. E. Huang and S. S. P. Shen, eds.), Interdiscip. Math. Sci., vol. 5, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, Reprinted from J. Atmospheric Ocean. Technol. **21** (2004), no. 4, 599–611, pp. 129–147.
- [FG04] P. Flandrin and P. Gonçalves, *Empirical mode decompositions as data-driven wavelet-like expansions*, Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. **2** (2004), no. 4, 477–496.
- [Fla99] P. Flandrin, *Time-frequency/time-scale analysis*, Wavelet Analysis and its Applications, vol. 10, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1999, With a preface by Yves Meyer, Translated from the French by Joachim Stöckler.
- [Fla07] ———, *Empirical mode decomposition*, MATLAB/C code, online, 2007, <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html> (Retrieved January 29, 2010).

- [FRG04] P. Flandrin, G. Rilling, and P. Gonçalvès, *Empirical mode decomposition as a filter bank*, Signal Processing Letters, IEEE **11** (2004), no. 2, 112–114.
- [FS00] M. Felsberg and G. Sommer, *The multidimensional isotropic generalization of quadrature filters in geometric algebra*, Lecture Notes in Computer Science **1888** (2000), 175–185.
- [FS01] ———, *The monogenic signal*, Signal Processing, IEEE Transactions on **49** (2001), no. 12, 3136–3144.
- [Haa10] A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Mathematische Annalen **69** (1910), no. 3, 331–371.
- [Hah96] S. L. Hahn, *Hilbert transforms in signal processing*, The Artech House Signal Processing Library, Artech House Inc., Boston, MA, 1996.
- [HCH⁺01] N. E. Huang, C. C. Chern, K. Huang, L. W. Salvino, S. R. Long, and K. L. Fan, *A new spectral representation of earthquake data: Hilbert spectral analysis of station TCU129, Chi-Chi, Taiwan, 21 September 1999*, Bull. Seism. Soc. Am. **91** (2001), no. 5, 1310–1338.
- [HHC05] N. E. Huang, K. Huang, and W.-L. Chiang, *HHT-based bridge structural health-monitoring method*, Hilbert-Huang transform and its applications (N. E. Huang and S. S. P. Shen, eds.), Interdiscip. Math. Sci., vol. 5, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, pp. 263–287.
- [HL03] N. E. Huang and S. R. Long, *Normalized Hilbert transform and instantaneous frequency*, Nasa Patent Pending GSC 14,673-1, 2003.
- [HSL⁺98] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N.-C. Yen, C. C. Tung, and H. H. Liu, *The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis*, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **454** (1998), no. 1971, 903–995.
- [HSL99] N. E. Huang, Z. Shen, and S. R. Long, *A new view of nonlinear water waves: the Hilbert spectrum*, Annu. Rev. Fluid Mech. **31** (1999), no. 1, 417–457.
- [Hua05] N. E. Huang, *Introduction to the Hilbert-Huang transform and its related mathematical problems*, Hilbert-Huang transform and its applications (N. E. Huang and S. S. P. Shen, eds.), Interdiscip. Math. Sci., vol. 5, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, pp. 1–26.
- [HWL⁺03] N. E. Huang, M.-L. C. Wu, S. R. Long, S. S. P. Shen, W. Qu, P. Gloersen, and K. L. Fan, *A confidence limit for the empirical mode decomposition and Hilbert*

- spectral analysis*, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **459** (2003), no. 2037, 2317–2345.
- [HWL⁺09] N. E. Huang, Z. Wu, S. R. Long, K. C. Arnold, X. Chen, and K. Blank, *On instantaneous frequency*, Advances in Adaptive Data Analysis **1** (2009), no. 2, 177–229.
- [HWQ⁺03] N. E. Huang, M.-L. Wu, W. Qu, S. R. Long, and S. S. P. Shen, *Applications of Hilbert-Huang transform to non-stationary financial time series analysis*, Appl. Stoch. Models Bus. Ind. **19** (2003), no. 3, 245–268.
- [Jac91] E. A. Jackson, *Perspectives of nonlinear dynamics. Vol. 1*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991, Corrected reprint of the 1989 edition.
- [JKKP10] G. Jager, R. Koch, A. Kunoth, and R. Pabel, *Decompositions of multivariate data based on adaptive spline-wavelets and a generalization of the Hilbert-Huang transform (HHT) to arbitrary space dimensions*, manuscript, accepted for publication in Advances in Adaptive Data Analysis (AADA), March 2010.
- [KO08] D. Kim and H.-S. Oh, *EMD: empirical mode decomposition and Hilbert spectral analysis*, R code, online, 2008, <http://cran.r-project.org/web/packages/EMD/> (Retrieved February 17, 2010).
- [KO09] ———, *EMD: a package for empirical mode decomposition and Hilbert spectrum*, The R Journal **1** (2009), no. 1, 40–46.
- [Koc08] R. Koch, *Analyse multivariater Daten: Konstruktion monogener Clifford-Algebrawertiger Funktionen mittels Empirical Mode Decomposition basierend auf adaptiven kubischen Spline-Wavelets und der Riesz-Transformation*, Diplomarbeit, Institut für Numerische Simulation, Universität Bonn, 2008.
- [KYH09] T. B. J. Kuo, C. H. Yang, Cheryl, and N. E. Huang, *Quantification of respiratory sinus arrhythmia using Hilbert-Huang transform*, Advances in Adaptive Data Analysis **1** (2009), no. 2, 295–308.
- [LLS05] Z.-F. Liu, Z.-P. Liao, and E.-F. Sang, *Speech enhancement based on Hilbert-Huang transform*, Machine Learning and Cybernetics, 2005. Proceedings of 2005 International Conference on, vol. 8, Aug. 2005, pp. 4908–4912.
- [Lon05] S. R. Long, *Applications of HHT in image analysis*, Hilbert-Huang transform and its applications (N. E. Huang and S. S. P. Shen, eds.), Interdiscip. Math. Sci., vol. 5, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, pp. 289–305.

- [LRN07] C.-P. Lai, Q. Ruan, and R. M. Narayanan, *Hilbert-Huang transform (HHT) processing of through-wall noise radar data for human activity characterization*, Signal Processing Applications for Public Security and Forensics, 2007. SAFE '07. IEEE Workshop on, April 2007, pp. 1–6.
- [LRX06] B. Liu, S. Riemenschneider, and Y. Xu, *Gearbox fault diagnosis using empirical mode decomposition and Hilbert spectrum*, Mechanical Systems and Signal Processing **20** (2006), no. 3, 718–734.
- [Mag02] I. Magrin-Chagnolleau, *Empirical mode decomposition*, MATLAB code, online, 2002, <http://www.owl.net.rice.edu/~elec301/Projects02/empiricalMode/> (Retrieved February 17, 2010).
- [Mal89] S. G. Mallat, *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation*, Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on **11** (1989), no. 7, 674–693.
- [MC91] Y. Meyer and R. R. Coifman, *Ondelettes et opérateurs. III*, Actualités Mathématiques [Current Mathematical Topics], Hermann, Paris, 1991.
- [Mey90a] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs. I*, Actualités Mathématiques [Current Mathematical Topics], Hermann, Paris, 1990.
- [Mey90b] ———, *Ondelettes et opérateurs. II*, Actualités Mathématiques [Current Mathematical Topics], Hermann, Paris, 1990.
- [Mey91] ———, *Ondelettes sur l'intervalle*, Revista Matemática Iberoamericana **7** (1991), no. 2, 115–133.
- [NB66] A. H. Nuttall and E. Bedrosian, *On the quadrature approximation to the Hilbert transform of modulated signals*, Proceedings of the IEEE **54** (1966), no. 10, 1458–1459.
- [Nol05] M. Nolf, *Ultrasonic calls (ca. 40 kHz) of a bat (likely a Common pipistrelle, Pipistrellus pipistrellus) while hunting*, online, September 2005, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ultrasonic_bat_calls.ogg (Retrieved June 20, 2009).
- [Ort08] M. Ortigueira, *Empirical mode decomposition*, MATLAB code, online, 2008, <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/21409> (Retrieved January 29, 2010).
- [Pan96] J. N. Pandey, *The Hilbert transform of Schwartz distributions and applications*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1996, A Wiley-Interscience Publication.

- [PCG09] C.-K. Peng, M. Costa, and A. L. Goldberger, *Adaptive data analysis of complex fluctuations in physiologic time series*, Advances in Adaptive Data Analysis **1** (2009), no. 1, 61–70.
- [Qia06] T. Qian, *Mono-components for decomposition of signals*, Math. Methods Appl. Sci. **29** (2006), no. 10, 1187–1198.
- [QWD09] T. Qian, Y.-B. Wang, and P. Dang, *Adaptive decomposition into mono-components*, Advances in Adaptive Data Analysis **1** (2009), no. 4, 703–709.
- [RF08] G. Rilling and P. Flandrin, *One or two frequencies? The empirical mode decomposition answers*, IEEE Trans. Signal Process. **56** (2008), no. 1, 85–95.
- [RFG03] G. Rilling, P. Flandrin, and P. Gonçalves, *On empirical mode decomposition and its algorithms*, Proceedings of IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing NSIP-03 (Grado (Italy)), June 2003.
- [RFGL07] G. Rilling, P. Flandrin, P. Gonçalves, and J. M. Lilly, *Bivariate empirical mode decomposition*, Signal Processing Letters, IEEE **14** (2007), no. 12, 936–939.
- [RPJ⁺10] J. Rudi, R. Pabel, G. Jager, R. Koch, A. Kunoth, and H. Bogen, *Multiscale analysis of hydrologic time series data using the Hilbert-Huang transform (HHT)*, revised manuscript, accepted for publication in Vadose Zone Journal, February 2010.
- [RWDM08] A. Roy, C.-H. Wen, J. Doherty, and J. Mathews, *Signal feature extraction from microbarograph observations using the Hilbert-Huang transform*, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on **46** (2008), no. 5, 1442–1447.
- [SDS96] E. J. Stollnitz, T. D. Deroose, and D. H. Salesin, *Wavelets for computer graphics: theory and applications*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, 1996.
- [Shi96] A. N. Shiryaev, *Probability*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 95, Springer-Verlag, New York, 1996, Translated from the first (1980) Russian edition by R. P. Boas.
- [SK04] H.-R. Schwarz and N. Köckler, *Numerische Mathematik*, B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.
- [SPTN05] L. W. Salvino, D. J. Pines, M. Todd, and J. M. Nichols, *EMD and instantaneous phase detection of structural damage*, Hilbert-Huang transform and its applications (N. E. Huang and S. S. P. Shen, eds.), Interdiscip. Math. Sci., vol. 5, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, pp. 227–262.

- [SS01] R. Schlittgen and B. H. J. Streitberg, *Zeitreihenanalyse*, 9. ed., Oldenbourg Verlag, Munich, 2001.
- [SV06] R. C. Sharpley and V. Vatchev, *Analysis of the intrinsic mode functions*, Constr. Approx. **24** (2006), no. 1, 17–47.
- [Tan08] A. Tan, *Hilbert-Huang transform*, MATLAB code, online, 2008, <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/19681> (Retrieved September 01, 2008).
- [TC98] C. Torrence and G. P. Compo, *A practical guide to wavelet analysis*, Bull. Amer. Meteor. Soc. **79** (1998), no. 1, 61–78.
- [TC04] ———, *Wavelet analysis software*, MATLAB code, online, 2004, <http://paos.colorado.edu/research/wavelets/> (Retrieved January 31, 2010).
- [Tit86] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, third ed., Chelsea Publishing Co., New York, 1986.
- [Wei10] E. W. Weisstein, *Analytic function*, MathWorld—A Wolfram Web Resource, 2010, <http://mathworld.wolfram.com/AnalyticFunction.html> (Retrieved February 04, 2010).
- [Wer07] D. Werner, *Funktionalanalysis*, 6. ed., Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2007.
- [WH04] Z. Wu and N. E. Huang, *A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method*, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **460** (2004), no. 2046, 1597–1611.
- [WH09] ———, *Ensemble empirical mode decomposition: a noise-assisted data analysis method*, Advances in Adaptive Data Analysis **1** (2009), no. 1, 1–41.
- [Wu09] Z. Wu, *HHT MATLAB program*, MATLAB code, online, 2009, http://rcada.ncu.edu.tw/research1_clip_program.htm (Retrieved June 19, 2009).
- [WZKL09] Z. Wang, Q. Zhu, J. Kiely, and R. Luxton, *Hilbert-Huang transform impedance measurement data for cellular toxicity monitoring*, Networking, Sensing and Control, 2009. ICNSC '09. International Conference on, March 2009, pp. 767–772.