

# Empirical Mode Decomposition durch adaptive Wavelet-Approximation

Johann Rudi

Institut für Mathematik  
Universität Paderborn

06.02.2009

Basierend auf Ergebnissen der Diplomarbeit (in Vorbereitung)  
“Empirical Mode Decomposition via adaptiver Wavelet-Approximation”

Robin Koch, Analyse multivariater Daten: Konstruktion monogener Clifford-Algebra-wertiger  
Funktionen mittels Empirical Mode Decomposition basierend auf adaptiven kubischen  
Spline-Wavelets und der Riesz-Transformation, Diplomarbeit, Univ. Bonn, 2008

## Methoden der Daten- bzw. Signalanalyse

### **Fourier-Transformation (FFT)**

- Zerlegung in sin/cos Funktionen
- Globale Frequenzen
- Geeignet für (stückweise) stationäre Signale

### **Wavelet-Transformation (FWT)**

- Zerlegung in vorher festgelegte Basis-Wavelets
- Regionale Frequenzen
- Geeignet für nichtstationäre Signale
- Datenpunkte auf uniformem Gitter

### **Hilbert-Huang-Transformation (HHT)**

- Adaptive Basis
- Lokale Frequenzen
- Geeignet für nichtstationäre Signale

# Hilbert-Huang-Transformation (HHT)

Entwickelt von Huang et. al. 1998

## Schritt 1: Empirical Mode Decomposition

Zerlegen eines Signals  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto s(t)$ , in

- Intrinsic Mode Functions  $g_j(t)$
- Monotones Residuum  $r_N(t)$

$$s(t) = \sum_{j=1}^N g_j(t) + r_N(t)$$

## Schritt 2: Hilbert-Spektral-Analyse

Essentiell: instantane Frequenzen der  $g_j(t)$

## Zu Schritt 1: Empirical Mode Decomposition von Huang et. al.

Geschachtelt iterativer Algorithmus, basierend auf der Berechnung von Einhüllenden des Signals und der Bestimmung von Extrema.

### **Probleme/Nachteile:**

- Bislang existiert keine Konvergenztheorie
- Aufwendig in Raumdimensionen  $> 1$

### **Alternative hier:**

Wavelet-Approximation mit adaptivem grob-nach-fein Algorithmus



## Zu Schritt 1: Empirical Mode Decomposition von Huang et. al.

Geschachtelt iterativer Algorithmus, basierend auf der Berechnung von Einhüllenden des Signals und der Bestimmung von Extrema.

### **Probleme/Nachteile:**

- Bislang existiert keine Konvergenztheorie
- Aufwendig in Raumdimensionen  $> 1$

### **Alternative hier:**

Wavelet-Approximation mit adaptivem grob-nach-fein Algorithmus

## Zu Schritt 2: Hilbert-Spektral-Analyse und instantane Frequenz

### Hilbert-Amplitude-Spektrum $H(\omega, t)$

Frequenz-Zeit Verteilung der Amplitude, Bestimmung mit Hilfe instantaner Frequenzen.

**Instantane Frequenz**  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für ein Signal  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto A(t) e^{i\varphi(t)}$

$$\langle \omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \omega |S(\omega)|^2 d\omega = \dots = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(t) A^2(t) dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega(t) := \varphi'(t)}$$

wobei

- $\langle \omega \rangle$  heißt Durchschnittsfrequenz
- $S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt$  ist Fourier-Transformierte von  $s(t)$

## Zu Schritt 2: Analytisches Signal und Hilbert-Transformation

Für  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sucht man eine Darstellung

$$z(t) = s(t) + i s_2(t) = A(t) e^{i\varphi(t)} \quad \text{mit}$$

$$s_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(t) = \sqrt{s^2(t) + s_2^2(t)} \quad \text{und} \quad \varphi(t) = \arctan\left(\frac{s_2(t)}{s(t)}\right)$$

Das **analytische Signal** liefert diese Darstellung

$$z(t) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \dots = s(t) + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{s(x)}{t-x} dx$$

$$\Rightarrow \text{Hilbert-Transformation } \mathcal{H}[s](t) := \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^\infty \frac{s(x)}{t-x} dx = s_2(t)$$

- $\mathcal{H}[s](t)$  ist linear
- $\mathcal{H}[s'](t) = (\mathcal{H}[s])'(t)$

## Zu Schritt 2: Analytisches Signal und Hilbert-Transformation

Für  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sucht man eine Darstellung

$$z(t) = s(t) + i s_2(t) = A(t) e^{i\varphi(t)} \quad \text{mit}$$

$$s_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(t) = \sqrt{s^2(t) + s_2^2(t)} \quad \text{und} \quad \varphi(t) = \arctan\left(\frac{s_2(t)}{s(t)}\right)$$

Das **analytische Signal** liefert diese Darstellung

$$z(t) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \dots = s(t) + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{s(x)}{t-x} dx$$

$\Rightarrow$  **Hilbert-Transformation**  $\mathcal{H}[s](t) := \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^\infty \frac{s(x)}{t-x} dx = s_2(t)$

- $\mathcal{H}[s](t)$  ist linear
- $\mathcal{H}[s'](t) = (\mathcal{H}[s])'(t)$

## Neuer Ansatz

### In Schritt 1:

Zerlegung über Wavelet-Approximation mit adaptivem grob-nach-fein Data-Fitting-Algorithmus [Castaño, Diss. 2005]

$$s(t) = \sum_j \underbrace{\sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t)}_{=:g_j(t)} + \sum_k \underbrace{c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t)}_{=:r_N(t)} = \sum_j g_j(t) + r_N(t) \quad \text{Level } j, \text{ Ort } k$$

### In Schritt 2:

Theoretische Charakterisierung der Darstellung in Schritt 1 bzgl. der Vorzeichen der instantanen Frequenzen

## Eigenschaften der verwendeten semiorthogonalen B-Spline-Wavelets

Nach Data-Fitting-Algorithmus von [Castaño, Diss. 2005]:  
**Stückweise lineare randangepasste B-Spline-Wavelets**

$$\{\psi_{j,k} : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{Level } j, \text{ Ort } k\}$$

entwickelt von Chui et. al.

Eigenschaften:

- Sind Linearkombinationen von B-Splines
- Bilden eine Riesz-Basis für  $L_2(I)$  bzgl.  $(\cdot, \cdot)_{L_2(I)}$
- Semiorthogonalität: Für  $j_1 \neq j_2$  gilt  $\int_I \psi_{j_1, k_1}(t) \psi_{j_2, k_2}(t) dt = 0$
- Träger ist kompakt
- Hervorragende numerische Eigenschaften bei Data-Fitting

## Aussagen zur instantanen Frequenz [Rudi, 2009]

**Satz**

Seien  $U \subseteq \mathbb{R}$ ,  $s : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $s(t) \neq 0$  für alle  $t \in U$

⇒

Instantane Frequenz  $\omega$  von  $s$  hat die Darstellung

$$\omega(t) = \left( s^2(t) + \mathcal{H}[s]^2(t) \right)^{-1} \left( s(t) \mathcal{H}[s'](t) - \mathcal{H}[s](t) s'(t) \right)$$

**Lemma**

Sei  $d_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{für genau ein } j, k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

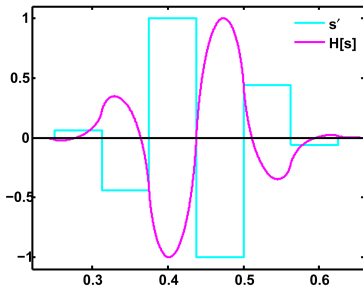
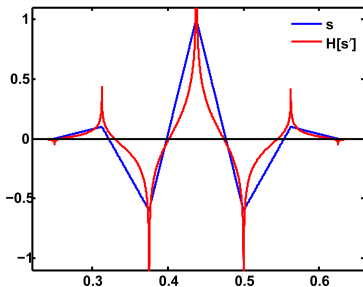
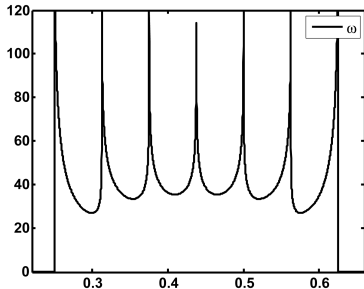
⇒

Für die instantane Frequenz  $\omega$  von  $s(t) = \psi_{j,k}(t)$  gilt

$$\omega(t) \geq 0 \quad \text{für alle } t$$

Instantane Frequenz eines einzelnen Wavelets:

$$\omega(t) = \left( s^2(t) + \mathcal{H}[s]^2(t) \right)^{-1} \left( s(t) \mathcal{H}[s'](t) - \mathcal{H}[s](t) s'(t) \right)$$





# Instantane Frequenz einer Linearkombination von Wavelets

## Satz

Sei  $s(t) := g_j(t) = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t) = \mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\psi}_j(t) = \mathbf{d}_j^T \mathbf{M}_{j,1}^T \boldsymbol{\phi}_{j+1}(t)$   
 für ein Level  $j$

⇒

Für die instantane Frequenz  $\omega$  von  $s$  gilt

$$\omega(t) = \left( s^2(t) + \mathcal{H}[s]^2(t) \right)^{-1} \underbrace{\left( s(t) \mathcal{H}[s'](t) - \mathcal{H}[s](t) s'(t) \right)}_{=:\xi(t)} \quad \text{mit}$$

$$\xi(t) = \underbrace{\left( \mathbf{d}^T \mathbf{M}^T \mathbf{C} \right) \mathbf{Q} \mathbf{D} \left[ \mathbf{B}(t) \mathcal{H}[\mathbf{B}]^T(t) - \mathcal{H}[\mathbf{B}](t) \mathbf{B}^T(t) \right] \mathbf{D} \left( \mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{d} \right)}_{=:\mathbf{A}}$$

Abkürzungen  $\mathbf{d} := \mathbf{d}_j$ ,  $\mathbf{M} := \mathbf{M}_{j,1}$  und  $\boldsymbol{\phi}(t) := \boldsymbol{\phi}_{j+1}(t)$ .

Die Matrix  $\mathbf{A}$  hat konjugiert komplexe Eigenwerte.

## Beweisskizze

$$\begin{aligned}
 \xi(t) &= \mathbf{s}(t) \mathcal{H}[\mathbf{s}'](t) - \mathcal{H}[\mathbf{s}](t) \mathbf{s}'(t) \\
 &= (\mathbf{d}^T \mathbf{M}^T \boldsymbol{\phi}(t)) (\mathcal{H}[\boldsymbol{\phi}']^T(t) \mathbf{M} \mathbf{d}) - (\mathbf{d}^T \mathbf{M}^T \mathcal{H}[\boldsymbol{\phi}](t)) (\boldsymbol{\phi}'^T(t) \mathbf{M} \mathbf{d}) \\
 &= (\mathbf{d}^T \mathbf{M}^T) [\boldsymbol{\phi}(t) \mathcal{H}[\boldsymbol{\phi}']^T(t) - \mathcal{H}[\boldsymbol{\phi}](t) \boldsymbol{\phi}'^T(t)] (\mathbf{M} \mathbf{d}) \\
 &= (\mathbf{d}^T \mathbf{M}^T \mathbf{C}) \mathbf{Q} \mathbf{D} [\mathbf{B}(t) \mathcal{H}[\mathbf{B}]^T(t) - \mathcal{H}[\mathbf{B}](t) \mathbf{B}^T(t)] \mathbf{D} (\mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{d})
 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & & & \\ & * & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & * & * \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{C}} \left( t\mathbf{I} + \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & & & \\ & 0 & * & & \\ * & 0 & \ddots & & \\ & * & \ddots & * & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & \ddots & * & * \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{Q}} \right) \underbrace{\text{diag}(*, \dots, *)}_{=:\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} B_{0,0}(t) \\ \vdots \\ B_{N-1,0}(t) \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{B}(t)}$$