

Autour de la modélisation du poumon

Introduction au domaine de recherche

Paul Cazeaux

sous la direction d'Yvon Maday et Céline Grandmont

Plan

1	Architecture de l'appareil respiratoire	1
2	Deux modèles pour un arbre dyadique	4
2.1	Domaine ramifié et trace	4
2.2	Problème de Poisson sur le domaine Ω^0	5
2.3	Arbre dyadique résistif et espaces de fonctions	6
2.4	Problème de Dirichlet sur l'arbre	7
2.5	Bilan	7
3	Homogénéisation du parenchyme pulmonaire	7
3.1	Motivation : Modèle multi-échelle du poumon	7
3.2	Homogénéisation	8
3.3	Matériau perforé	9
3.4	Modèle de parenchyme pulmonaire 1D	10
3.5	Un premier modèle tridimensionnel	11

Enjeux

Mon stage de Master, et ma thèse, ont pour objet la description en termes mathématique du poumon. La modélisation mathématique et numérique des divers aspects du corps humain sont aujourd'hui de plus en plus sollicités par le monde médical. Ces modélisations vont de l'étude de l'évolution de certaines molécules, de bactéries, à la modélisation du comportement d'organes du corps humain. Ainsi, l'analyse de modèles couplés fluide - structure a pu conduire à la modélisation de flux sanguins dans les artères, autour d'anévrismes par exemple, ou à la modélisation du coeur. Je me suis plus particulièrement intéressé à la modélisation du poumon, qui vise à une meilleure compréhension des mécanismes susceptibles d'être rencontrés par les médecins lors des mesures effectuées en milieu hospitalier, par exemple dans les cas de patients asthmatiques.

Ces problèmes ont donné lieu à un certain nombre de modèles simplifiés, visant à prendre en compte tel ou tel aspect, ou tel ou tel paramètre, jusqu'à des modèles tridimensionnels en géométrie réelle. Pour les expliquer, nous allons d'abord présenter rapidement la physiologie du poumon. Le modèle expérimental décrit est celui présenté par Weibel [1]

1 Architecture de l'appareil respiratoire

Paroi thoracique, muscles respiratoires L'appareil respiratoire est contenu dans la cage thoracique. Les poumons sont disposés plus ou moins symétriquement de part et d'autre du médiastin, partie centrale qui renferme coeur, trachée, oesophage et d'importants vaisseaux sanguins. La cage thoracique est séparée de la cavité abdominale et des différents organes qui s'y trouvent par le diaphragme, muscle inspiratoire.

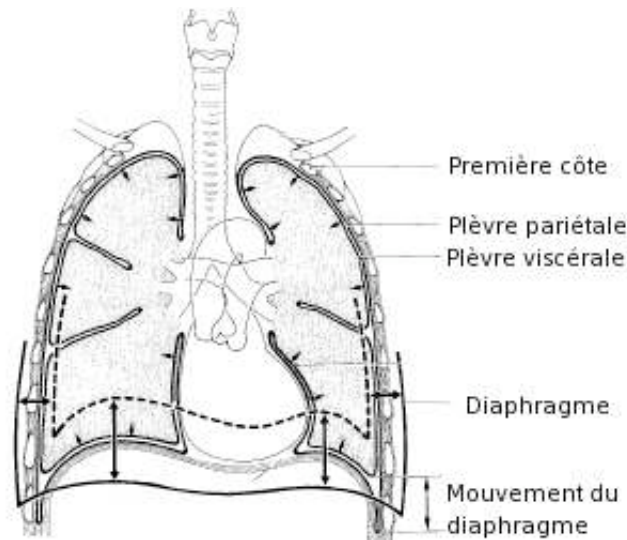


FIGURE 1 – Appareil Respiratoire

En outre, on peut voir sur le diagramme la frontière formée par les deux feuillets, plèvre pariétale et plèvre viscérale, qui séparent les poumons de la cage thoracique. Ces deux feuillets sont séparés par un vide hermétique (le vide pleural) qui assure la transmission des efforts de la respiration tout en permettant un mouvement plus libre aux poumons lors de l'inspiration et de l'expiration, et l'étanchéité de l'appareil respiratoire.

Lors des deux phases de la respiration, inspiration et expiration, l'énergie et le mouvement nécessaires à la modification en taille et en volume de la cage thoracique sont ainsi entraînées par les contractions du diaphragme, des muscles intercostaux et des muscles de la paroi abdominale. L'expiration au repos est passive, grâce à l'élasticité naturelle des poumons, et dans le cas d'une respiration forcée on voit intervenir les muscles intercostaux externes et les muscles abdominaux. Le principal muscle respiratoire, le diaphragme, est une mince cloison musculaire s'insérant entre la septième et la douzième côte. Lors de l'inspiration, il se contracte et s'aplanit, de manière à augmenter le volume occupé par les poumons et à attirer l'air dans l'appareil respiratoire, et se relâche lors de l'expiration.

Structure de l'arbre bronchique L'autre aspect de l'appareil respiratoire est le réseau des bronches responsable de la conduction de l'air de l'extérieur jusque dans les alvéoles où se passent les échanges gazeux entre l'air et le sang lors de l'inspiration, et de son expulsion lors de l'expiration. Comme on peut le voir sur la figure, la géométrie de ce réseau est chez l'humain un arbre dyadique à 23 générations constitué de bronches et de bronchioles. Le diamètre va de 2 cm à la trachée aux bronchioles terminales dont le diamètre est de l'ordre du demi millimètre. Il se divise en deux régions de fonctionnement distinctes, les premières générations plus rigides dont le rôle est uniquement la conduction de l'air vers les générations suivantes, et les dernières générations qui forment les acini, où se déroule simultanément conduction de l'air et échanges gazeux.

Les conduits supérieurs vont ainsi de la bouche et du nez à la 17e génération. Malgré quelques dissymétries dans les toutes premières générations dues à la présence du médiastin, on a assez vite des branchements dichotomiques d'une génération sur l'autre, avec une progression géométrique du diamètre de chaque génération, avec un facteur de l'ordre de 0.85 entre chaque génération, ce qui joue un rôle important dans la modélisation de cet arbre, d'après les mesures sur la taille des bronchioles menées par E.R. Weibel [1]

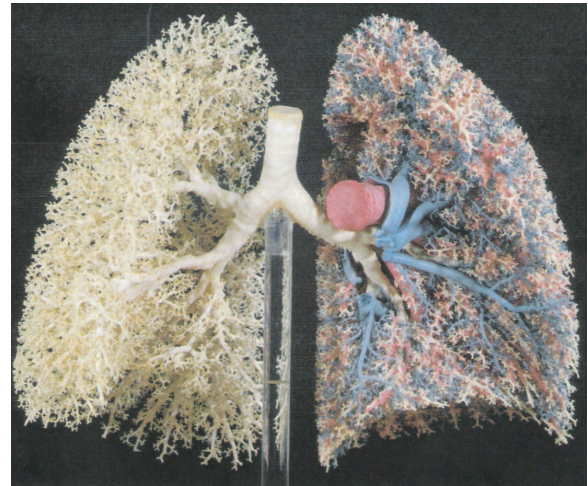
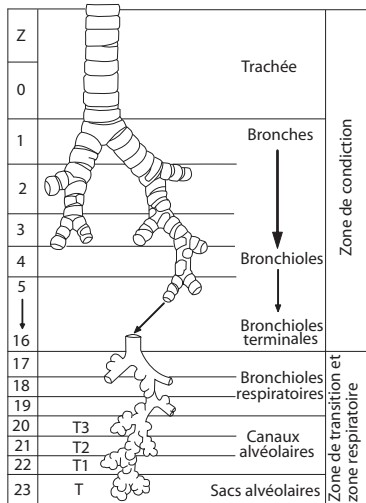


FIGURE 2 – Ramifications des voies aériennes

FIGURE 3 – Moulage du Poumon (Weibel)

Les conduits inférieurs, à partir de la dix-septième génération, correspondent à la zone de respiration à proprement dit du poumon, où se déroulent les échanges gazeux avec le sang. On n'y trouve plus ni cartilage ni muscle lisse, et ils sont regroupés en acini au nombre de 30 000 environ, sous-arbres dichotomiques à six générations auxquels s'accrochent comme en "grappe" les sacs alvéolaires. La surface respiratoire couverte par les 300 millions d'alvéoles est ainsi de l'ordre de 200 m^2 , avec un paroi très fine contenant les capillaires sanguins de manière à permettre l'hématose (échanges gazeux entre le milieu alvéolaire et le sang.)

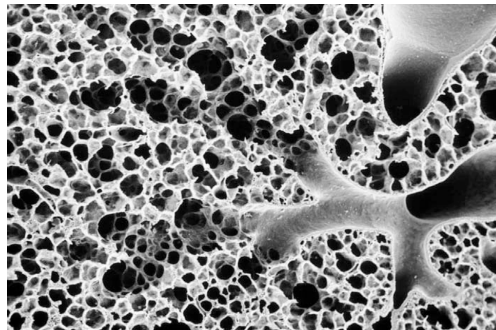


FIGURE 4 – Image du tissu pulmonaire

Le parenchyme pulmonaire La "mousse" ainsi constituée, ensemble des alvéoles et d'un réseau dense de capillaires sanguins, séparés par une paroi de l'ordre de $0.2\ \mu\text{m}$, est le lieu des échanges gazeux ainsi facilités. Ses propriétés élastiques doivent néanmoins permettre d'accompagner les variations de volume lors de l'inspiration. En effet, les voies respiratoires supérieures étant rigidifiées par les muscles lisses ne changent quasi pas de volume lors de l'inspiration, l'air inspiré servant donc principalement à alimenter les acini en oxygène. Ce milieu représente environ 90% de l'ensemble des poumons, contre 3 % pour les voies respiratoires supérieures ou les gros vaisseaux sanguins.

2 Deux modèles pour un arbre dyadique

La structure "fractale" ainsi observée du réseau bronchique au sein du poumon a motivé des efforts de modélisation. En effet, le nombre élevé de générations et la complexité de la géométrie engendrée, difficile à construire dans le cadre d'un poumon réel, empêchent de chercher à résoudre numériquement les équations de Navier - Stokes dans le domaine 3D formé par l'arbre bronchique. Toutefois, la structure "fractale" relativement régulière permet d'espérer une simplification du problème, en faisant tendre le nombre de générations à l'infini pour observer le comportement limite "homogénéisé". Deux modèles ont donc été proposés pour rendre compte de telles structures ramifiées. Une première approche développée par M. Achdou *et al* garde une construction géométrique d'un domaine ramifié, en limitant les calculs à des résolutions sur un domaine de base de géométrie simple. Une deuxième approche, a priori complémentaire, étudiée par M. Maury *et al* met au contraire de côté la géométrie pour se servir, via la loi de Poiseuille, d'une analogie résistive avec des réseaux électriques.

2.1 Domaine ramifié et trace

La première approche a ainsi consisté à étudier les solutions d'équations définies sur un domaine ramifié dans \mathbb{R}^2 , construit de façon auto-similaire. Ce modèle est développé par Achdou *et al* dans [3], [4], [5], [6]. Le domaine est construit par homothéties successives à partir d'un domaine de base Y^0 . On se donne deux homothéties du plan F_1 et F_2 de rapport $1/2$ et de centre bien choisi, et en notant A_n les applications de $1, \dots, n$ dans $1, 2$ on définit pour $\sigma \in A_n$ la transformation affine du plan :

$$M_\sigma(F_1, F_2) = F_{\sigma(1)} \circ \dots \circ F_{\sigma(n)}$$

On a ainsi la construction suivante :

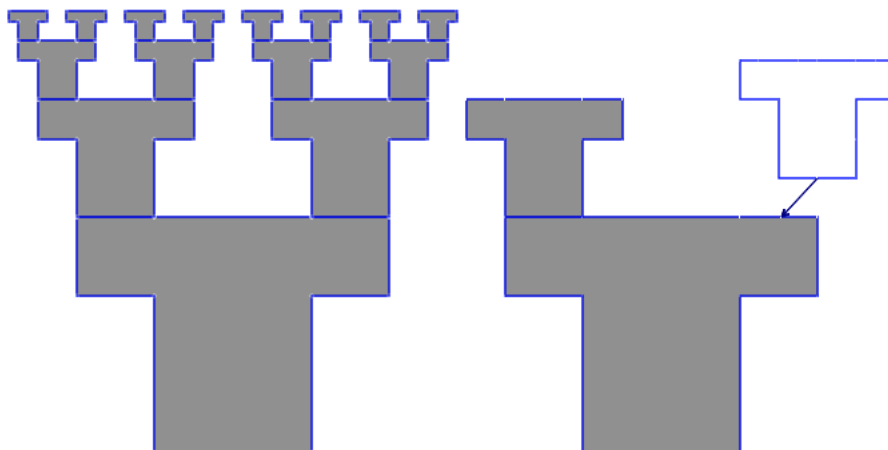


FIGURE 5 – Construction du domaine Ω_0

où les différents domaines utiles sont :

- le domaine final limite ramifié Ω^0 , autosimilaire : $\text{Int} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{\sigma \in A_n} M_\sigma(F_1, F_2)(\overline{Y^0}) \right)$
- mais aussi les domaines Y^N étapes de la construction : $\text{Int} \left(\bigcup_{n=0}^N \bigcup_{\sigma \in A_n} M_\sigma(F_1, F_2)(\overline{Y^0}) \right)$
- et Ω_N l'ensemble $\Omega^0 \setminus \overline{Y^{N-1}}$

La frontière supérieure de l'ouvert Ω^0 est alors une droite, mais comme Ω^0 n'est pas régulier, les résultats classiques dans les espaces de fonctions de Sobolev sur les ouverts (existence d'une inégalité de Poincaré, trace sur les bords, extension d'une donnée au bord en une fonction sur le domaine...) ne s'appliquent pas directement. Toutefois, la structure récursive du domaine et le fait qu'il est inclus dans un domaine compact permettent de retrouver un certain nombre de résultats, en particulier de donner un sens à l'opérateur trace des fonctions sur la frontière supérieure du domaine :

Proposition 2.1. Soient p, q choisis dans $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ de sorte que $W^{1-\frac{1}{p}, p}(\Gamma^\infty)$ et $W^{1-\frac{1}{q}, q}(\Gamma^\infty)$ soient contenus dans $L^2(\Gamma^\infty)$, alors pour $u \in W^{1,p}(\Omega^0)$ et $g \in W^{1,q}(\Omega^0)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_n} u|_{\Gamma_n} g|_{\Gamma_n} = \frac{1}{3} \int_{\Gamma^\infty} u|_{\Gamma^\infty} g|_{\Gamma^\infty}$$

Par extension, on peut définir une trace dans $H^1(\Omega^0)$ mais cet opérateur n'est pas forcément unique.

2.2 Problème de Poisson sur le domaine Ω^0

Grâce à ces résultats, il est possible d'envisager la résolution numérique de problèmes d'équations aux dérivées partielles sur le domaine Ω^0 avec la donnée de conditions aux bords sur la frontière supérieure. Le problème de Poisson par exemple est a priori vérifié par la pression de l'air lors d'un écoulement stable dans un tel domaine, et peut s'écrire sous forme variationnelle :

$$\begin{aligned} w|_{\Gamma^0} &= u, \\ \int_{\Omega^0} \nabla w \cdot \nabla v &= \frac{1}{3} \int_{\Gamma^\infty} g \gamma(v), \quad \forall v \in V(\Omega^0). \end{aligned}$$

en mettant des conditions de Dirichlet sur la frontière inférieure, de Neumann homogènes sur les bords latéraux, et de Neumann sur les bouts grâce à l'opérateur de trace γ . Il est alors possible de montrer l'existence et l'unicité de la solution de ce problème. Toutefois, le domaine Ω^0 n'est pas adapté à des calculs numériques : mais il est possible de ne résoudre que des problèmes sur le domaine de base Y^0 grâce à une méthode de point fixe, grâce à la construction autosimilaire du domaine Ω^0 .

En effet, si on s'intéresse par exemple au relèvement harmonique H^0 d'une donnée u sur la frontière inférieure de Ω^0 , on introduit l'opérateur Dirichlet - Neumann, chargé d'associer à une donnée Dirichlet sur le bord, la condition de Neumann sur le même bord qui donne la même solution pour le problème de Poisson soit $T^0 : H^{1/2}(\Gamma^0) \mapsto (H^{1/2}(\Gamma^0))'$ tel que

$$\langle T^0 u, v \rangle = \int_{\Omega^0} \nabla H^0(u) \cdot \nabla H^0(v)$$

La connaissance de cet opérateur permettrait de calculer la restriction à Y^0 fonction solution du problème de Poisson sur Ω^0 ou bien la restriction à un domaine ramifié Y^N grâce à l'auto-similarité du domaine. Or, toujours grâce à l'auto-similarité, cet opérateur T_0 est le point fixe d'un opérateur contractant bien choisi. En effet, il fait partie de l'ensemble \mathbb{O} des opérateurs bornés, auto-adjoints, semi-positifs et coercifs sur

$$V = \left\{ v \in H^{1/2}(\Gamma^0), \int_{\Gamma^0} v = 0 \right\}$$

et est laissé invariant (par auto-similarité du domaine) par l'opérateur \mathbb{M} défini par : pour $Z \in \mathbb{O}$,

$$\begin{aligned} \forall u \in H^{1/2}(\Gamma^0) \quad , \quad \forall v \in H^1(Y^0), \\ \langle \mathbb{M}(Z)u, v|_{\Gamma^0} \rangle &= \int_{Y^0} \nabla \hat{u} \cdot \nabla v + \sum_{i=1}^2 \langle Z(\hat{u}|_{F_i(\Gamma^0)} \circ F_i), v|_{F_i(\Gamma^0)} \circ F_i \rangle \end{aligned}$$

On montre que ce dernier opérateur est contractant : il est donc possible de calculer avec une précision arbitraire T_0 , puis de résoudre approximativement le problème de Poisson sur Y^0 en utilisant sur la frontière supérieure la condition aux limites dite transparente sur la frontière supérieure Γ^1 :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + T^0 \hat{u}|_{\Gamma^0} = 0 \text{ sur } \Gamma^0$$

pour connaître la restriction à Y^0 de la solution du problème de Poisson sur Ω^0 , puis en itérant sur les sous-domaines Y^N . Ainsi on aboutit à un algorithme qui permet de calculer la solution du problème de Poisson sur un domaine complexe, sans avoir à faire de simplifications géométriques comme calculer la solution du problème posé sur un domaine partiel à N générations.

2.3 Arbre dyadique résistif et espaces de fonctions

Une construction alternative consiste à oublier l'aspect géométrique de l'arbre bronchique, en s'intéressant à la loi de Poiseuille entre chute de pression ΔP et flux d'air Φ qui est vérifiée au moins à partir de la 6e génération :

$$\Delta P = \frac{8\mu L}{\pi R^4} \Phi$$

L'arbre prend alors une allure de réseau résistif, mis en forme comme un ensemble de noeuds et d'arêtes associées à des résistances (V, E, r) où $E \subset V \times V$ est l'ensemble des arêtes orientées et r est une fonction symétrique positive sur E , les noeuds :

Définition 2.2. *Un arbre dyadique résistif infini $T = (V, E, r)$ est composé d'un ensemble de noeuds V , un ensemble d'arêtes orientées $E \subset V \times V$, et une fonction r symétrique et positive sur E , avec 0 le noeud initial et $x = (n, k)$ pour x le k -ième noeud de la n -ième génération de l'arbre, avec la résistance*

$$r_{nk} = r(n-1, E(k/2); nk).$$

On note E^+ l'orientation de l'arbre. L'ensemble des bouts est alors $\Gamma = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

On peut alors définir sur l'arbre les notions de pression (une fonction sur les noeuds), de gradient de pression ou de flux d'air (une fonction sur les arêtes orientées), ce qui amène à définir les opérateurs divergence et gradient traduisant les notions reliées sur l'arbre réel :

Définition 2.3. *Soit $L = \mathbb{R}^{E^+}$ l'ensemble des fonctions réelles antisymétriques sur E et $H = \mathbb{R}^V$ les fonctions réelles sur V , on appelle divergence l'opérateur $\partial : L \rightarrow H$ avec*

$$\forall x \in V, \partial u(x) = \sum_{y \sim x} u(x, y)$$

et gradient l'opérateur $\partial^* : H \rightarrow L$ avec

$$\forall (x, y) \in E, \partial^* p(x, y) = p(y) - p(x)$$

Enfin, on note formellement pour $u, v \in L \times L$ et $p, q \in H \times H$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{L, L} &= \sum_{[x, y] \in E^+} u(x, y)v(x, y) \\ \langle p, q \rangle_{H, H} &= \sum_{x \in V} p(x)q(x) \end{aligned}$$

On définit ainsi les espaces fonctionnels sur l'arbre :

Définition 2.4. *Soit $L^2(T)$ et $H^1(T)$ définis par :*

$$\begin{aligned} L^2(T) &= u \in \mathbb{R}^{E^+} / \|u\|_2^2 = \sum_{[x, y] \in E^+} r(x, y)u(x, y)^2 < +\infty \\ H^1(T) &= p \in \mathbb{R}^V / |p|_1^2 = \sum_{[x, y] \in E^+} c(x, y)[p(y) - p(x)]^2 < +\infty \end{aligned}$$

et $H_0^1(T)$ la fermeture dans $H^1(T)$ des fonctions à support fini.

Il est clair que ces espaces sont des espaces de Hilbert avec leurs normes associées, ainsi que $H_0^1(T)$ muni de la norme $\|p\|_1^2 = c(0)p(0)^2 + |p|_1$, et représentent les espaces d'énergie finie.

2.4 Problème de Dirichlet sur l'arbre

On peut remarquer que le cas du problème de Darcy vérifié par la pression sur l'arbre, réécriture de la loi de Poiseuille, peut s'écrire facilement à l'aide de ces opérateurs sur l'arbre :

$$\begin{cases} u + c\partial^*p = 0 \text{ sur les arêtes, traduisant la loi de Poiseuille} \\ \partial u = \delta_0 \text{ traduisant la conservation du flux d'air} \end{cases}$$

Sans chercher à résoudre ce système, on cherche plutôt à caractériser la trace de la pression sur l'ensemble de bouts, et plus particulièrement à savoir ce qui se passe si on "branche" l'arbre dyadique sur un domaine de \mathbb{R}^3 , comme l'arbre bronchique se "branche" sur l'ensemble des alvéoles pour l'irriguer en air frais. Le résultat dépend alors principalement de la résistance équivalente de l'arbre : pour un arbre fini à N générations, dont toutes les branches terminales sont reliées à un même point, on peut déterminer une résistance équivalente R_N associée à une arête unique ; la suite R_N est alors croissante et sa limite R est définie comme la résistance équivalente de l'arbre dyadique résistif infini.

Le résultat intéressant est alors la relation qui se fait entre l'existence de fonctions d'énergie finie ayant une trace non nulle sur les bouts de l'arbre et la résistance équivalente de l'arbre. En effet, on a le théorème :

Théorème 2.5. *Soit R la résistance effective de l'arbre résistif infini $T = (V, E, r)$, alors*

$$R = +\infty \Leftrightarrow H_0^1(T) = H^1(T)$$

Ainsi, si la résistance de l'arbre est infinie, on peut trouver une fonction dont le gradient est à support compact aussi proche que l'on veut d'une fonction d'énergie finie. Physiquement, cela est à mettre en relation avec le facteur d'échelle entre deux générations successives. En raison de la loi de Poiseuille, la résistance de chaque tube évolue en effet comme $1/r^3$. Dès lors, dans le cas simple d'une évolution géométrique d'un rapport λ des dimensions des bronchioles, on écrit la résistance équivalente sous la forme de la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_0}{(2\lambda^3)^n}$$

Ainsi, la condition pour que l'arbre "respire" est que $\lambda > \sqrt[3]{2}$. On peut remarquer que cette condition implique aussi que le volume occupé par l'arbre grandit de manière infinie si l'on souhaitait faire une construction géométrique de l'arbre correspondant. D'ailleurs, l'arbre bronchique réel satisfait la condition avec $\lambda \simeq 0.85$. La discussion dans [7] relative à la recherche d'un rapport optimum d'efficacité montre d'ailleurs que même si l'idéal serait un rapport de $\sqrt[3]{2} \simeq 0.79$, la très rapide dégradation de l'efficacité sur la gauche de cet optimum rendrait dangereuse de petites variations par rapport à la norme : même avec un λ réel un peu plus grand, les contractions des générations inférieures de bronches liées à l'asthme entraînent d'ailleurs de graves insuffisances respiratoires.

2.5 Bilan

On a ainsi développé deux approches différentes liées aux phénomènes découlant d'une structure infiniment ramifiée. Toutefois, bien que complémentaires dans leur approche, l'une géométrique et l'autre discrète, il apparaît que les résultats sont mutuellement exclusifs : en effet, l'inégalité de Poincaré et l'inclusion dans un domaine compact, cruciaux à l'étude du problème géométriques, tombent précisément dans le cas où la résistance de l'arbre est infinie et où en fait l'arbre "ne respire pas". La résolution pratique d'équations et un sens moins abstrait pour l'espace des bouts de l'arbre que l'approche géométrique présentent ne peuvent donc être étendus à l'étude de l'arbre bronchique.

3 Homogénéisation du parenchyme pulmonaire

3.1 Motivation : Modèle multi-échelle du poumon

Pour décrire le mécanisme de la ventilation du poumon, il faut ainsi prendre en compte les interactions à des échelles très différentes : la traction à l'échelle macroscopique par le diaphragme sur le

poumon, le gonflement des alvéoles à l'échelle microscopique. Une première étape dans la modélisation du poumon est de construire un modèle multiéchelle mettant en relation de manière simplifiée les différentes parties du mécanisme respiratoire.

Pour obtenir un modèle simple et utilisable, on a donc les composants suivants :

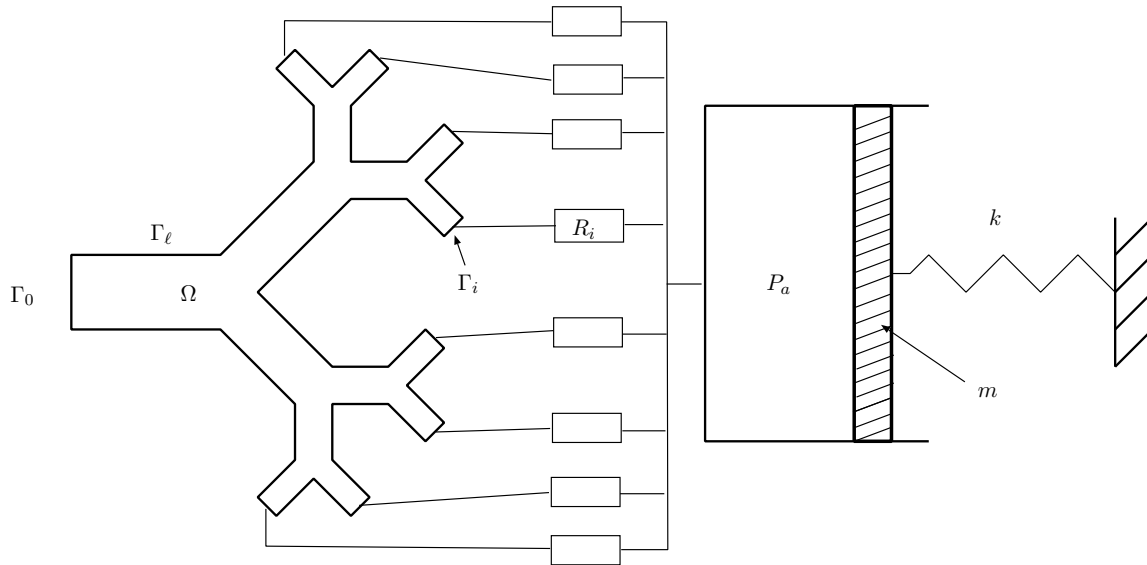


FIGURE 6 – Modèle multiéchelle

- Les parties supérieures des bronches, avec modélisation du flux 3D par les équations de Navier Stokes pour prendre en compte la turbulence,
- Les bronchioles, ici modélisées par un arbre résistif représenté par la résistance équivalente, toutes connectées à un "réservoir" commun d'air où règne la pression alvéolaire P_a ,
- Un piston de masse m représentant la partie élastique du parenchyme pulmonaire (la "mousse" formée par les alvéoles et le réseau capillaire), sur lequel agissent d'un côté la pression alvéolaire P_a , et de l'autre :
- un ressort k qui modélise les propriétés élastiques du parenchyme et du diaphragme.

On peut ainsi avoir une première représentation du mécanisme respiratoire allant des forces appliquées au niveau du ressort (qui représentent les efforts musculaires fournis par le diaphragme et les muscles impliqués) au flux d'air en sortie. Le modèle permet ainsi de tracer des courbes volume d'inspiration - vitesse de l'air à la bouche, qui sont les courbes sur lesquelles travaillent les médecins, et de donner une première idée des possibilités des simulations même en utilisant un modèle "élémentaire".

3.2 Homogénéisation

Une des parties du modèle représentée de manière vraiment grossière est le parenchyme pulmonaire, réduit à sa plus simple expression sous la forme d'un piston et d'un ressort. Pour représenter le parenchyme, constitué au niveau microscopique principalement d'une "mousse" d'alvéoles, on fait appel à la théorie de l'homogénéisation. Celle ci permet de comprendre le comportement macroscopique d'un matériau dont la structure microscopique est complexe. Dans le cas particulier d'une structure périodique (matériaux lamellés, cristaux, etc), on fait appel à la théorie de l'homogénéisation à double échelle introduite par Allaire [13].

Il s'agit ainsi d'étudier la "convergence" des fonctions solution d'EDP sur le matériau complexe, quand on fait tendre le paramètre d'échelle ϵ des variations microscopiques vers 0. Le propre de la convergence double-échelle est alors de développer cette convergence à la fois au niveau macroscopique et au niveau de la cellule périodique de base, pour mieux capturer le comportement microscopique du

matériau : dans le cadre périodique, on explicite ainsi les problèmes de cellule nécessaires pour calculer les coefficients des opérateurs homogénéisés, et parfois le problème double échelle est bien posé là où le simple problème homogénéisé perd ce caractère. Plus exactement, on définit la convergence double échelle comme suit :

Définition 3.1. Une suite $\{v^N\} \subset L^2(\Omega)$ converge double-échelle vers une fonction $v \in L^2(\Omega; L^2_\#(Y))$ (le $\#$ dénote la Y -périodicité) si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v^N(x) \psi \left(x, \frac{x}{\epsilon^N} \right) = \int_{\Omega} \int_Y v(x, y) \psi(x, y)$$

pour toutes les fonctions $\psi \in C^\infty(\Omega; C^\infty(Y))$. On note $v^N \xrightarrow{2} v$.

De plus, si d^N est une suite de $H^1(\Omega)$ uniformément bornée, alors on peut trouver $d^0 \in H^1(\Omega)$ et $d^1 \in L^2(\Omega; H^1_\#(Y)/\mathbb{R})$ tels que à extraction d'une sous-suite près,

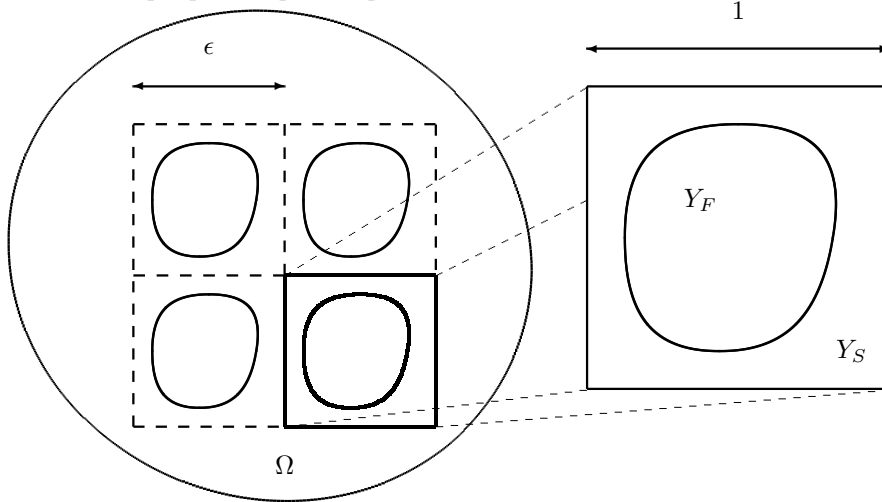
$$d^N \xrightarrow{2} d^0 \text{ et } \nabla d^N \xrightarrow{2} \nabla_x d^0 + \nabla_y d^1$$

Ainsi, d^0 permet de retrouver le comportement global du matériau, et d^1 transcrit l'influence des variations microscopiques au niveau du gradient. Cela revient à approximer d^N par le développement en puissances de ϵ

$$d^N(x) = d^0(x) + \epsilon d^1 \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) + \dots$$

3.3 Matériau perforé

Une application de cette théorie est par exemple de modéliser le comportement macroscopique d'un matériau élastique perforé périodiquement.



On s'intéresse à un domaine périodique Ω_ϵ construit à partir d'un ouvert borné régulier Ω de \mathbb{R}^d et la cellule unité $Y = (-1/2, 1/2)^N$, divisée en une partie Y_F (bulle ouverte et simplement connexe avec $\overline{Y_F}$ strictement inclus dans Y) et une partie solide Y_S . On définit alors le domaine perforé

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^N} \epsilon (\overline{Y_F} + k)$$

Pour plus de simplicité, on fait l'hypothèse que les trous ne rencontrent pas la frontière Γ de Ω et on désigne par Γ_ϵ la frontière intérieure correspondant au bord des trous.

On s'intéresse au problème de l'élasticité linéaire sur Ω_ϵ avec des conditions de Dirichlet sur le bord extérieur :

$$-\operatorname{div}\sigma(\mathbf{d}_\epsilon) = 0 \text{ sur } \Omega_\epsilon, \mathbf{d}_\epsilon = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma, \sigma(\mathbf{d}_\epsilon) \cdot \mathbf{n}_\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_\epsilon$$

Où $\mathbf{d}_\epsilon \in H^1(\mathbb{R}^d)^d$ est le déplacement de la structure et σ l'opérateur d'élasticité qui s'écrit avec les coefficients de Lamé (λ, μ) :

$$\sigma(u) = \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$$

Dans la mesure où ϵ est petit, on s'attend à voir émerger un comportement global. Grâce à la convergence double-échelle, on peut montrer, en notant l'opérateur d'extension par 0 dans les trous :

Théorème 3.2. *Il existe $(\mathbf{d}^0, \mathbf{d}^1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H^1_\#(Y))$ tels que $\overline{\mathbf{d}_\epsilon} \xrightarrow{2} \mathbf{d}^0$ et $\overline{\nabla \mathbf{d}_\epsilon} \xrightarrow{2} \nabla_x \mathbf{d}^0 + \nabla_y \mathbf{d}^1$ où $(\mathbf{d}^0(x), \mathbf{d}^1(x, y)|_{\Omega \times Y_S})$ est la solution unique du problème variationnel :*

$$\int_{\Omega} \int_{Y_S} (\sigma_x(\mathbf{d}^0) + \sigma_y(\mathbf{d}^1)) : (\nabla_x \mathbf{v}^0 + \nabla_y \mathbf{v}^1) = 0$$

$$\mathbf{d}^0 = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma$$

pour tout couple $(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1) \in C_0^\infty(\Omega)^d \times L^2(\Omega; C^\infty_\#(Y))^d$.

On peut alors séparer les deux échelles et en particulier écrire le problème de cellule sur \mathbf{d}^1 . Ainsi $\mathbf{d}^1(x, \cdot)$ est Y -périodique et résout le problème : $\forall \mathbf{v} \in C^\infty_\#(Y)$,

$$\int_{Y_S} \sigma_y(\mathbf{d}^1) \cdot \nabla \mathbf{v} = -|Y_S| \sigma_x(\mathbf{d}^0)$$

Ce problème est bien posé sur Y_S et on peut donc écrire $\mathbf{d}^1(x, \cdot)$ comme une combinaison linéaire de "correcteurs" à l'aide des coefficients de $\sigma(\mathbf{d}^0)(x)$. Le problème homogénéisé en \mathbf{d}^0 se simplifie ainsi naturellement pour s'écrire sous la forme

$$\int_{\Omega} \sigma_{hom}(\mathbf{d}^0) : \nabla \mathbf{v}^0 = 0$$

$$\mathbf{d}^0 = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma$$

les coefficients de l'opérateur σ_{hom} , $\sigma_{hom}(\mathbf{u}) = (a_{ijkl}(\partial_k u_l + \partial_j u_k))$ se calculant grâce à une série de problèmes sur Y_S . On peut donc considérer le matériau "homogénéisé" comme matériau limite représentant une bonne approximation du matériau perforé, sans avoir la complexité ajoutée par la géométrie du domaine Ω_ϵ .

3.4 Modèle de parenchyme pulmonaire 1D

Grâce à la théorie de l'homogénéisation, on peut envisager de mieux comprendre le comportement mécanique du parenchyme pulmonaire au niveau macroscopique là où la complexité du domaine interdisent des simulations numériques directes même au niveau de l'écoulement de l'air dans l'arbre bronchique au complet (on peut au plus modéliser les 6 ou 10 premières générations, sur un total de 23). Pour ce faire, on va coupler un matériau perforé périodiquement (pour représenter les alvéoles), tout en reliant les perforations via un arbre dyadique résistif.

A une dimension, ceci se représente comme une succession de petites masses (le tissu pulmonaire) et de poches d'air (les alvéoles). Les masses sont reliées par des ressorts, et l'air peut s'échapper à travers un arbre dyadique de tuyaux (l'arbre bronchique). Ainsi toutes les poches d'air sont connectées par l'arbre. En se servant de la loi de Poiseuille, comme pour un réseau électrique, on peut relier la pression dans une quelconque des alvéoles et le flux d'air en sortie de chacune des alvéoles. En écrivant ces pressions p_i^N et ces flux q_i^N on a ainsi des coefficients A_{ij}^N permettant d'écrire ces relations :

$$\mathbf{p}^N = \mathbf{A}^N \mathbf{q}^N$$

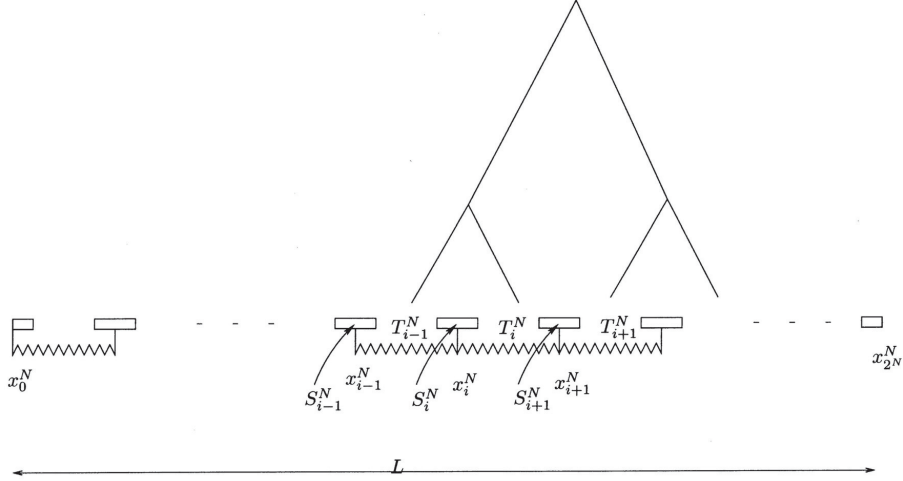


FIGURE 7 – Modèle 1D

Sous l'action de forces intérieures $f_i^N(t)$ les positions notées u_i^N pour la i -ième masse parmi les $2^N - 1$ du système vérifient donc le système d'équations couplées :

$$m_N \ddot{u}_i^N(t) - k_N (u_{i+1}^N(t) - 2u_i^N(t) + u_{i-1}^N(t)) + \sum_{j=1}^{2^N} A_{i-1,j-1}^N (\dot{u}_j^N(t) - \dot{u}_{j-1}^N(t)) - \sum_{j=1}^{2^N} A_{i,j-1}^N (\dot{u}_j^N(t) - \dot{u}_{j-1}^N(t)) = m_N f_i^N(t)$$

avec les coefficients m_i^N (poids de la i -ième masse) et k_N (coefficient de raideur des ressorts). Pour des conditions initiales données, ce système d'équations différentielles ordinaires possède une solution et on montre (cf [11]) que lorsque le nombre de générations N tend vers $+\infty$ les mouvements des masses convergent faiblement vers la solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\rho \alpha_S \partial_{tt} u(x, t) - k \partial_{xx} u(x, t) - \partial_t \partial_x \int_0^1 K(x, y) \partial_y u(y, t) dy = \rho \alpha_S f(x, t)$$

la fonction $K(x, y)$ est le noyau de l'opérateur non-local apparaissant comme la limite de l'opérateur \mathbf{A} , ρ est la densité, α_S la proportion de la partie solide.

On voit ainsi apparaître en sus de l'équations des ondes représentant le système masse - ressorts un opérateur non-local de dissipation d'énergie qui traduit la présence de l'arbre bronchique.

3.5 Un premier modèle tridimensionnel

En combinant les deux approches précédentes, on peut espérer obtenir un modèle 3D utilisable pour modéliser le matériau parenchyme. Reprenant le matériau perforé et son domaine Ω_ϵ , on considère à présent que les trous représentent les alvéoles et sont reliés par un arbre dyadique résistif sans réalité géométrique, mais qui couple flux et pressions comme dans le modèle 1D. Pour un arbre à N générations, renommant le domaine Ω^N , on a donc 2^N alvéoles numérotées $Y_F^{N,i}$ de bord Γ_N^i . On impose des conditions de Dirichlet nulles sur une partie Γ_D de Γ et des conditions de Neumann sur son complémentaire Γ_N .

Ceci donne le problème suivant au premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial \mathbf{d}^N}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{d}^N) = 0 & \text{sur } \Omega_N \\ \mathbf{d}^N = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma(\mathbf{d}^N) \mathbf{n} = p_{\text{pleurale}} \mathbf{n}^N & \text{sur } \Gamma_N \\ \sigma(\mathbf{d}_\epsilon) \cdot \mathbf{n}_\epsilon = p_i \mathbf{n} = \left(\sum_{j=0}^{2^N-1} R_{ij}^N \int_{\Gamma_N^j} \mathbf{d}^N \cdot \mathbf{n}^N \right) \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_N^i \end{array} \right.$$

On a ainsi inséré le couplage non-local dû à l'arbre bronchique idéalisé dans le problème élastique écrit plus haut. Comme dans le problème 1D, l'influence de l'arbre fait apparaître une fonction $K(x, x')$ comme le noyau d'un opérateur de couplage non-local qui transcrit dans l'équation l'arbre dyadique et la division au fil des générations de l'arbre du domaine en une suite de partitions emboîtées, où chaque partie est irriguée par une seule branche de la génération (comme la division poumon droit, poumon gauche pour la première génération). A cause de ce terme, on ne peut pas écrire le problème de la façon simplifiée utilisée dans le cas du matériau perforé ci dessus. On peut donc passer de la même manière à la limite double échelle quand le nombre de générations tend vers l'infini et montrer :

Théorème 3.3. *Il existe $(\mathbf{d}^0, \mathbf{d}^1) \in L^2([0, T]; H_0^1(\Omega)^d) \cap W^{1, \infty}([0, T]; L^2(\Omega)^d) \times L^2([0, T]; L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)))$ tels que $\overline{\mathbf{d}_\epsilon} \xrightarrow{2} \mathbf{d}^0$ et $\overline{\nabla \mathbf{d}_\epsilon} \xrightarrow{2} \nabla_x \mathbf{d}^0 + \nabla_y \mathbf{d}^1$ où $(\mathbf{d}^0(x), \mathbf{d}^1(x, y)|_{\Omega \times Y_S})$ est la solution unique du problème variationnel :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \int_{Y_S} [\sigma_x(\mathbf{d}^0) + \sigma_y(\mathbf{d}^1)] : [\nabla_x(\mathbf{v}^0) + \nabla_y(\mathbf{v}^1)] + \int_{\Omega} \rho |Y_S| \frac{\partial^2 \mathbf{d}^0}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v}^0 \\ \quad + \int_{\Omega} \int_{\Omega} K(x, x') \left[|Y_F| \operatorname{div}_x \partial_t \mathbf{d}^0(t, x) - \int_{\Gamma_F} \partial_t \mathbf{d}^1 \cdot \mathbf{n}(t, x, y) dy \right] \\ \quad \left[|Y_F| \operatorname{div}_x \mathbf{v}^0(t, x') - \int_{\Gamma_F} \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}(t, x', y') dy' \right] \\ = - \int_{\Gamma_N} p_{\text{pleu}} \mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{n} \end{array} \right.$$

Comme souvent, la biologie permet ici de trouver un problème original : bien sûr, c'est une version caricaturale par bien des aspects de la réalité du parenchyme, périodicité, élasticité linéaire, oubli de l'action de la tension superficielle, etc., sont des approximations grossières. Mais ainsi posé, il décrit l'interaction entre élasticité et structure poreuse alimentée par l'arbre bronchique et soulève déjà des problèmes mathématiques non triviaux, d'approximation numérique (coût a priori prohibitif de calcul du terme non-local) ou de contrôle (stabilisation à long terme par un terme de dissipation non conventionnel) entre autres.

Références

- [1] E.R. Weibel, *Morphometry of the Human Lung*, Springer-Verlag, 1963
- [2] Thesis by C. Vannier.
- [3] Y. Achdou, C. Sabot, et N. Tchou. Diffusion and propagation problems in some ramified domains with a fractal boundary. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 40(4) :623–652, 2006.
- [4] Y. Achdou et N. Tchou. Neumann conditions of fractal boundaries. 2007.
- [5] Y. Achdou, C. Sabot, et N. Tchou. Transparent boundary conditions for the Helmholtz equation in some ramified domains with a fractal boundary. *Journal of computational physics*, 2006.
- [6] Y. Achdou, C. Sabot, et N. Tchou. A multiscale numerical method for poisson problems in some ramified domains with a fractal boundary.
- [7] M. B, F. M, et S. E. Weibel ER. An optimal bronchial tree may be dangerous. *Nature*, 2004.
- [8] B.Mauroy, M. Filoche, J. Andrade, et J. . B. Sapoval. Interplay between geometry and flow distribution in an airway tree. *Physical Review Letters*, 90(14) :4, Avril 2003.
- [9] C. Grandmont, B. Maury, et N. Meunier. A viscoelastic model with non-local damping application to the human lungs. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 40(1) :201–224, 2006.
- [10] B. Maury, D. Salort, C. Vannier, Trace theorems for trees, application to the human lung, accepted in *Network and Heterogeneous Media* (2009).
- [11] C. Grandmont, B. Maury and N. Meunier, One dimensional viscoelastic model of the parenchyma, A viscoelastic model with non-local damping application to the human lungs, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 40 (2006), no. 1, 201-224.
- [12] L. Baffico, C. Grandmont, Y. Maday, A. Osses, Homogenization of elastic media with gaseous inclusions, *Multiscale Model. Simul.*, 7 (2008), no. 1, 432-465.
- [13] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Appl. Math.*, 23(6) :1482-1515, 1992.